



TITLE:

非保存Sandpile Modelの理論的研究(修士論文(1997年度))

AUTHOR(S):

木内, 豊

CITATION:

木内, 豊. 非保存Sandpile Modelの理論的研究(修士論文(1997年度)). 物性研究 1998, 71(1): 63-118

ISSUE DATE:

1998-10-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/96427>

RIGHT:

非保存 Sandpile Model の理論的研究

筑波大学大学院
理工学研究科 物理工学専攻
木内 豊

Abstract

われわれは非保存系に拡張された Sandpile Model について, 1 次元を中心に理論的研究を行う. Site の状態は 3 つの Group に分類され, 各 Group の周囲の配置に対する性質を示す. その性質から, Site の状態の出現確率やなだれの規模分布を厳密に求める. また, この Model の Fibonacci 数列や Lucas 数列との関係を明らかにする.

Contents

1 Introduction	64
2 Sandpile Model	65
3 1 次元 Model の厳密解	76
4 Fibonacci 数列と Lucas 数列	97
5 Conclusions	109
Acknowledgments	109
A Computer Simulation	110
References	118

Chapter 1

Introduction

1987年にBak, Tang, Wiesenfeldによって発案されたSandpile Model (BTW Model) は、砂山が崩れる現象の本質部分を抜き出した Cellular Automaton Model である [1]. 相転移などにみられる一般的な臨界現象は、温度などの外部パラメータがある特別な条件を満たすときにだけ現れ、べき乗則を示す。それに対してこの Model は 2 次元以上において、自発的になだれ規模の分布がべき乗則を示す状態に到達する。この概念は自己組織臨界性 (Self-Organized Criticality, SOC) と名付けられ、Model と共に注目を集めている。地学の分野における地震の規模分布 (Gutenberg-Richter 則)、天文学における太陽フレアからの硬 X 線の強度分布など SOC は自然界に多々存在し [2, 3], また砂山の生成 [4] や、水滴のなだれ [5] などの実験による SOC も報告されている。他にも地震 Model [6, 7] や森林火災 Model [8], 河川 Network による侵食 Model [9] などが SOC を示す Model として知られているが、BTW Model は最も簡単な規則をもつ基本的なものと位置付けられる。

これまでの BTW Model に対する研究の取り組みは、数値 Simulation による解析 [10] や、平均場近似 [11], 繰り込み論的手法 [12] などによってべきの指数 (臨界指数) が近似的に求められた。また、Dhar はこの Model の崩落の規則を表す行列を導入し [13], それを用いることによる厳密な解析が行われた [14, 15]. 一方、Model の規則に対する様々な拡張を行い、SOC の条件について議論がなされている [16, 17]. Manna, Kiss, Kertesz は非保存系への拡張により新たなパラメータを定義し、Computer を用いた数値実験によって近似的な分布曲線を求め、それが相転移現象の温度パラメータに対応することを示した [18].

本論文において、われわれはこの非保存に拡張された Sandpile Model を、1 次元を中心に理論的研究を行う。まず Chapter 2 において Model を定義し、一般の次元での重要な性質を取り上げる。Chapter 3 では 1 次元において Site の状態を 3 つの Group に分類、それらと周囲の配置との関係により、Site の状態の出現確率やなだれの規模分布を厳密に求める。また Chapter 4 では、この 1 次元 Model の Fibonacci 数列や Lucas 数列との関係を明らかにする。Chapter 5 でまとめる。最後に Appendix A に 2 次元 Model の Computer Simulation の方法と結果を捕捉する。

Chapter 2

Sandpile Model

本章ではまず Model を定義する (2.1節). 次にいくつかの基礎的な事柄を記し (2.2節), 最後に Model の定常状態である再帰配置について記述する (2.3節). これらの本章の内容は全て一般の次元を対象とする.

2.1 Model の定義

Model の規則, 逸脱率, 境界条件を定義する.

2.1.1 規則

BTW Model

N 次元立方格子を考え, 各格子点 (Site) に番号 i を付ける. (ただし, 1 次元のときはこの番号付けは単純に対応がつくが, 2 次元以上では, Figure 2.4 のように一意的ではない.) これらの Sites は離散値 $z (\geq 0)$ をとるとし, $z < 2N$ である Site は安定であるが, $z \geq 2N$ の場合は不安定である. Model は次の 2 つの規則により表される.

追加 Random に Site を選び, その Site に 1 粒子加える.

$$z_i \longrightarrow z_i + 1 \quad (\text{追加})$$

崩落 $z \geq 2N$ である Site は崩落を起こして $2N$ 粒子失い, 隣接 Sites に 1 粒子ずつ配る.

$$z_j \longrightarrow z_j - \Delta_{ij} \quad (\text{崩落, } z_i \geq 2N)$$

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 2N & j = i \\ -1 & j : i \text{ の最隣接 Sites} \\ 0 & j : \text{その他} \end{cases}$$

追加を繰り返すことを時間 Step の進行とみなす. この進行により, いずれある Site で $z_i \geq 2N$ となり崩落を起こすが, それにより隣接 Site でも $z \geq 2N$ となると崩落は波及する. この波及をなだれと呼ぶ. なだれは単位 Step に対して瞬間的に起こるものとし, なだれが起きている間は追加は行われない.

Manna 達による非保存 Model への拡張

Manna, Kiss, Kertesz は, この Model の 2 つの規則を以下のように拡張した [18].

$$z_i \longrightarrow z_i + C \quad (\text{追加}) \tag{2.1}$$

$$z_j \longrightarrow z_j - \Delta_{ij} \quad (\text{崩落, } z_i \geq A) \quad (2.2)$$

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} A & j = i \\ -B & j : i \text{ の最隣接 Sites} \\ 0 & j : \text{その他} \end{cases}$$

$z_i < A$ で安定, $z_i \geq A$ のとき不安定で崩落を起こす.

A, B, C が有理数の組であるものは, それらを定数倍することにより得られる整数の組の場合と Model の性質は等しい. また公約数をもつ場合も, 最大公約数で割ることによって得られる公約数をもたない組と定性的に等しい. (2.3節) このことから以後, “ A, B, C は公約数をもたない正の整数” を選ぶ.

2.1.2 逸脱率

逸脱率 d を以下のように定義する¹.

$$d = \frac{A}{B} - 2N \quad (2.3)$$

ただし本論文では粒子の逸脱を対象とし,

$$d \geq 0, \quad A \geq 2N \cdot B \quad (2.4)$$

である. 規則は $B = C$ とし, d を用いると,

$$z_i \longrightarrow z_i + 1 \quad (\text{追加})$$

$$z_j \longrightarrow z_j - \Delta_{ij} \quad (\text{崩落, } z_i \geq 2N + d)$$

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 2N + d & j = i \\ -1 & j : i \text{ の最隣接 Sites} \\ 0 & j : \text{その他} \end{cases}$$

と表すことができ, $d = 0$ のとき BTW Model と一致する.

2.1.3 境界条件

有限系を扱う際には端の Site が存在し, 開放境界, 閉鎖境界, 周期境界を定義する.

開放境界 端 Site が崩落を起こすと粒子は系外にこぼれ落ちる. 系はそのぶんの粒子数 B を境界から失う (1次元では Figure 2.1).



Figure 2.1: 1次元, 開放境界の端 Site の崩落

i が端の Site であるとする (2.2) 式の Δ_{ij} は,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} A & j = i \\ -B & j : i \text{ の最隣接 Sites} \\ 0 & j : \text{その他} \end{cases} \quad (2.5)$$

で, 端に接しない Site と同じである.

¹Manna 達が [18] で定義し使いたのは, 移動率 $R = 1 - \frac{A}{2N \cdot B}$ であるが, 本論文では逸脱率 $d = -2N \cdot R$ を採用する.

閉鎖境界 端の Site の崩落は粒子を系外に与えない. T が境界に接している数であるとする (2 次元の辺では $T = 1$, 角では $T = 2$). そのぶん粒子 TB が Site i に残る (1 次元では Figure 2.2).



Figure 2.2: 1 次元, 閉鎖境界の端 Site の崩落

i が端 Site のとき Δ_{ij} は,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} A-TB & j = i \\ -B & j : i \text{ の最隣接 Sites} \\ 0 & j : \text{その他} \end{cases} \quad (2.6)$$

である.

周期境界 端の Site が反対側の端の Site に隣接したものである. (1 次元では $1 \sim l$ の Site を輪としてつなげたものと考えることができる. Figure 2.3)

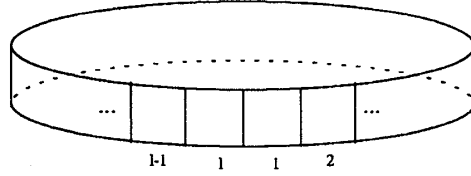


Figure 2.3: 1 次元, 周期境界

i が端 Site のとき Δ_{ij} は,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} A & j = i \\ -B & j : i \text{ の最隣接 Sites} \\ -B & j : i \text{ の反対側の Sites} \\ 0 & j : \text{その他} \end{cases} \quad (2.7)$$

である.

周期境界や閉鎖境界は開放されておらず, 保存系 ($d = 0$) では系に蓄積された総粒子数がある値を越えると安定化できなくなる. 非保存系への拡張により周期境界や閉鎖境界が許され, 以後断りがない場合には全ての端の Site は開放境界であるとする.

Chapter 3 での 1 次元 Model の考察では各境界条件の特性に注目する. 1 次元では, 両端が開放境界 (両開), 両端が閉鎖境界 (両閉), 一方が開放境界で他方が閉鎖境界 (開閉), 周期境界 (周期) の 4 つの場合が考えられるが, なだれ規模などの定性的な特徴は系を大きくとるにつれ境界からの影響が薄らぎ, 無限系では境界による区別はなくなる.

2.2 基礎事項

配置をベクトルとして表すことにより Model は代数的に扱うことができる. それによりこの Model における一意性と可換性を示し, また逸脱率と崩落回数関係を記述する.

2.2.1 ベクトル表示

単位 Step の過程は以下の恒等式で表現される.

$$z + C a - \Delta t = z' \quad (2.8)$$

z : 任意の配置. z_i を成分とした Sites の数だけの要素をもつ ベクトル.

a : 追加 Site に対応する 1 つの成分が 1 で, その他の成分が 0 のベクトル.

t : 配置が安定化するまでの各 Site の必要崩落回数を成分とするベクトル. 次小節により崩落は可換であることからこの表現が許される.

z' : 試行後の安定配置.

Δ : Dhar の行列. Δ_{ij} を成分とし崩落を表す. 以下, 全て開放境界の場合の例をあげる.

- 1 次元での Dhar の行列は,

$$\Delta_{1dim} = \begin{bmatrix} A & -B & & & \\ -B & A & -B & & \\ & -B & A & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -B \\ & & & -B & A \end{bmatrix}$$

である.

- 2 次元, 系 3×3 のとき, Figure 2.4 のように各 Site に番号をつける.

1	2	3
6	5	4
7	8	9

Figure 2.4: 系 3×3 の各 Site の番号付け

このとき Dhar の行列は以下になる.

$$\Delta_{2dim,3 \times 3} = \begin{bmatrix} A & -B & & & & & & -B & \\ -B & A & -B & & & & & & \\ & -B & A & -B & & & & & \\ & & -B & A & -B & & & & \\ & & & -B & A & -B & & & -B \\ -B & & & -B & -B & A & -B & & -B \\ & -B & & & -B & A & -B & & \\ & & & & -B & A & -B & & \\ & & & & -B & & -B & A & -B \\ & & & & & -B & & -B & A \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

対角成分は全て A で, 角 (Site 1, 3, 7, 9) に対応する 1, 3, 7, 9 行, 列には 2 つの $-B$ を, 辺 (Site 2, 4, 6, 8) に対応する 2, 4, 6, 8 行, 列には 3 つの $-B$ を, 中央部分 (Site 5) に対応する 5 行, 列には 4 つの $-B$ を成分にもつ.

- N 次元の一般の系に対しても, 対角成分は全て A , 各行各列はその Site がもつ隣接 Sites 数のぶんだけ $-B$ を成分にもち, 対称行列である.

(2.8) 式の例として, 1次元系 3 の $A = 3, B = 1, C = 1$ の場合を以下に示す.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

配置 $[222]$ の左端 Site への追加を行うと, 全ての Site が 1 回ずつ崩落して $[110]$ となる.

2.2.2 一意性と可換性

崩落の可換性

\mathbf{z} が $z_i \geq A, z_j \geq A$ の不安定配置であるとき, Site i, j で崩落が起きる. t_i, t_j をそれぞれ i, j 成分が 1, その他の成分が 0 のベクトルであるとする, 崩落は Dhar の行列を用いて線形に表すことができる.

$$(\mathbf{z} - \Delta t_i) - \Delta t_j = (\mathbf{z} - \Delta t_j) - \Delta t_i = \mathbf{z} - \Delta(t_j + t_i)$$

このことから崩落は可換である.

安定化の一意性

崩落の可換性から, 不安定配置がたどり着く安定配置は崩落の順序によらず一意に決まる. 以後, 不安定配置 \mathbf{z} が安定化した配置を $[\mathbf{z}]$ と表す.

$$\mathbf{z} \xrightarrow{\text{stable}} [\mathbf{z}]$$

追加と崩落の可換性

Site i が不安定 ($z_i \geq A$) である配置 z に対して, Site j への追加を考える. この追加を表すベクトルを a_j (j 成分が 1 でその他が 0) とすると, やはり Dhar の行列を用いて線形に表すことができる.

$$(z - \Delta t_i) + C a_j = (z + C a_j) - \Delta t_i$$

Site i の崩落の後で j に追加を行う場合と, 逆に j への追加の後で i が崩落する場合の配置は等しく, 追加と崩落は可換である.

追加の可換性

崩落どうしが可換であること, 追加と崩落が可換であることから次の式が成り立つ.

$$[[z + C a_i] + C a_j] = [[z + C a_j] + C a_i]$$

まず安定配置 z の Site i に追加を行い安定化, 次に Site j に追加を行い安定化した配置は, 追加の順序を逆にして安定化したものと等しく, 追加は可換である². ただしこれは到達する安定配置に対しての可換性であり, なだれ規模に対しては追加ごとになだれが定義されるため可換ではない.

2.2.3 最多崩落回数

BTW Model ($A = 2N, B = C = 1, d = 0$) において, 不安定な Site ($z_i \geq 2N$) は崩落により粒子を $2N$ 失う.

$$z'_i = z_i - 2N$$

このとき隣接 Sites も全て崩落を起こすと, その Site は周りから粒子を受け取ることによって再び不安定になる.

$$\begin{aligned} z_i &= z'_i + 2N \\ &= (z_i - 2N) + 2N \\ &= z_i \geq 2N \end{aligned}$$

無限系の全ての Sites の状態が最大 ($z = 2N - 1$) である配置に追加が行われると, この隣接 Sites どれだけの粒子のやりとりは終ることがない. 非保存 ($d > 0$) のときには無限系である場合でもこのやりとりは有限で, 逸脱率 d の大きさにより起こり得る最多崩落回数を $\frac{C}{B} \leq 1$ の場合について示す.

無限系の全ての Sites の状態が最大 ($z = A - 1$) である配置の Site i に追加を行ったとする. このとき各成分は,

$$\begin{cases} z_i(0) = (A - 1) + C \geq A \\ z_{others}(0) = A - 1 \end{cases}$$

で, まず Site i で崩落が起きる.

$$z(0) - \Delta t_i = z'(0)$$

t_i は i 成分が 1, 他の成分が 0. このとき $z'(0)$ の各成分は,

$$\begin{cases} z'_i(0) = (A - 1) + C - A \\ z'_{n.n.}(0) = (A - 1) + B \geq A \\ z'_{others}(0) = A - 1 \end{cases}$$

²これらの可換性をもつ Model は, 他の可換性をもたない Model と区別して Abelian Model と呼ばれる [13].

となり, 隣接 Sites でも崩落が起きる. さらにそれによって隣接 Sites の周りも不安定になり, それを繰り返すことで崩落は全ての Sites に波及する.

$$z(0) - \Delta t(1) = z(1)$$

$t(1)$ の成分は全て 1. このとき $z(1)$ の i 成分が

$$z_i(1) = (A-1) + C - A + 2NB \geq A$$

であれば Site i は再び崩落する.

一般に, 全ての Sites が k 回ずつ崩落したとする.

$$z(0) - \Delta t(k) = z(k)$$

$t(k)$ の成分は全て k . このとき Site i が

$$z_i(k) = (A-1) + C - k(A-2NB) \geq A \quad (2.9)$$

で崩落するならば, 隣接 Sites は B を受け取り,

$$z'_{n.n.}(k) = (A-1) - k(A-2NB) + B$$

である. $\frac{C}{B} \leq 1$ の場合には (2.9) 式より $z'_{n.n.}(k) \geq A$ で, 崩落は全体に波及. このことから帰納的に

“ $\frac{C}{B} \leq 1$ のとき, 全ての Sites の崩落回数が等しい”

ことが分かる. このとき k 回目の崩落で初めて安定 ($z \leq A-1$) になったとすると,

1. $(k-1)$ 回目では不安定で,

$$z_i(k-1) = (A-1) + C - (A-2NB) \cdot (k-1) \geq A$$

このとき,

$$d = \frac{A-2NB}{B} \leq \frac{C-1}{B(k-1)} < \frac{C}{B(k-1)}$$

となる.

2. k 回目で安定で,

$$z_i(k) = (A-1) + C - (A-2NB) \cdot k \leq (A-1)$$

このとき,

$$d = \frac{A-2NB}{B} \geq \frac{C}{Bk}$$

となる.

これらを合わせて, 起こり得る最多崩落回数 k に対する d の範囲は,

$$\frac{C}{Bk} \leq d < \frac{C}{B(k-1)} \quad (2.10)$$

である. 各 k に対して表にまとめると Table 2.1 になる.

$\frac{C}{B} = 1$ のときには,

$$\frac{1}{k} \leq d < \frac{1}{k-1} \quad (2.11)$$

である.

$\frac{C}{B} > 1$ では, Site i とそれ以外の Sites では崩落回数が異なるためこの限りではない.

d の範囲	最多崩落回数
$d \geq \frac{C}{B}$	1
$\frac{C}{2B} \leq d < \frac{C}{B}$	2
$\frac{C}{3B} \leq d < \frac{1}{2B}$	3
\vdots	\vdots
$\frac{C}{kB} \leq d < \frac{C}{(k-1)B}$	k
\vdots	\vdots
$d = 0 (k \rightarrow \infty)$	∞

Table 2.1: $B \geq C$ のときの最多崩落回数

2.2.4 $d < 0$ での発散

本論文では(正の)逸脱を対象とし $d \geq 0$ であるが, 逸脱率が $d < 0$ である場合を簡単に述べておく.

$$d < 0, \quad 2NB > A \quad (2.12)$$

前小節と同様に, 無限系の全ての Sites が最大である配置の Site i に追加を行ったとする.

$$z_i(0) = (A - 1) + C$$

このとき Site i は $z_i(0) \geq A$ で崩落を起こすが, それにより隣接 Sites も崩落を起こし

$$z_i(1) = (A - 1) + C - A + 2NB$$

となる. このとき (2.12) 式から $z_i(0) < z_i(1)$ で, Site i の粒子数が増加している. このように $d < 0$ では崩落の度に系の粒子数が増加してしまい, Sites の平均値が大きくなると, 無限に発散し安定化することがなくなる. ($d = 0$ の場合では崩落回数は発散するが, 粒子の数は保存していた. それに対して $d < 0$ では粒子数も発散してしまう.) 開放境界による有限系の場合でも, 増加の度合 $|d|$ が系の大きさに対して充分小さければ粒子の数は発散はしないが, $|d|$ が大きいときは崩落による増加が境界からの逸脱を上回り, 粒子の数は発散する.

2.3 再帰配置

有限系の場合, Sites 数 L が有限でしかも各 Site の状態 z も $0 \sim A-1$ の離散値をとり有限であるため, 配置数は A^L で有限である. それらの配置は, 時間発展により 2 度以上出現し得る配置 (再帰配置) とただ 1 度だけしか出現し得ない過渡的な配置 (非再帰配置, 例: 全ての Sites の状態が 0 の配置) に分けらる. つまり, z が安定配置であるとすると,

$$[z + C a] = z \quad (2.13)$$

を満たす追加の仕方 $a (> 0)$ が存在するとき z は再帰配置で, 存在しないとき非再帰配置である.

2.3.1 状態空間

Sites 数 L の系において, 各 Site の状態を軸にとった L 次元超格子空間 (状態空間) に各配置 z を対応させる. 一意性と可換性が成り立つ系に Random な追加が行われることから, 配置の遷移は状態空間における一歩 (追加) の大きさを C とした正方向への Random Walk と捉えることができる.

Figure 2.5 は 1 次元, 系 2 (Sites 数 2) の両開, $A = 5, B = 2$ における状態空間を, 崩落を保留した不安定配置も含めて描いてある.

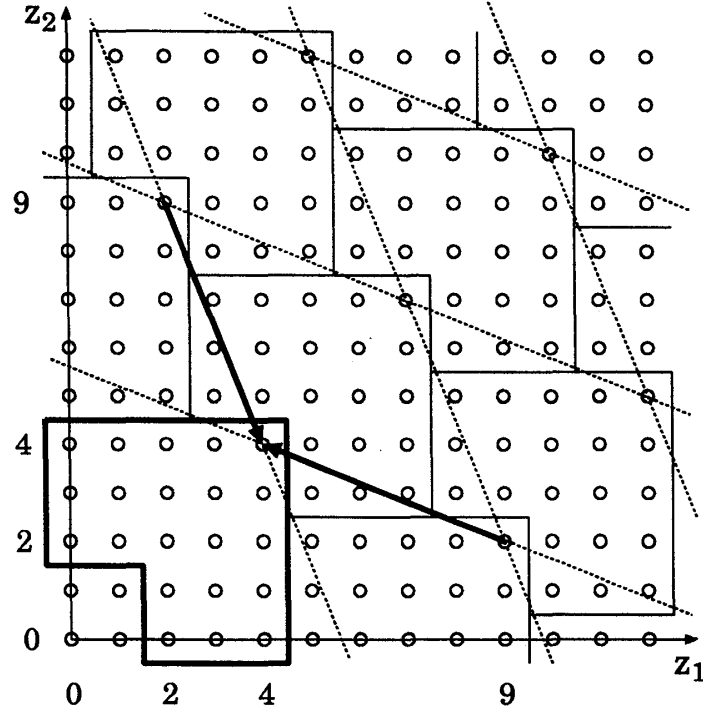


Figure 2.5: 1 次元, 系 2 の両開, $A = 5, B = 2$ における状態空間

座標 (○) は各配置を意味し, 太線で囲まれた領域は安定な再帰配置, それより内側の領域は非再帰配置, 外側の領域は不安定な再帰配置である. 安定配置が一意に決まることから, 全ての不安定な配置は太線内の配置のいずれかの配置に対応する. その対応は崩落によりなされ, 矢印は配置 [92] が左 Site の崩落により, [29] が右 Site の崩落により, いずれも [44] に安定化することを表している. これを式で表すと,

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

となる. Dhar の行列の各列は状態空間の基底 (各列は線形独立でこの状態空間を張る) で安定化の方向を向く. 実線で囲んだそれぞれの領域は, 安定化の際の各 Site の崩落回数の組合せが, 言い換えると, この基本ベクトルの “結合の重み” が等しく, 各領域内の全ての配置が太線内の配置と 1 対 1 に対応する. この領域は Unit Cell として, この空間の再帰部分を埋め尽くす.

2.3.2 再帰配置数

状態空間では単位体積につき 1 つの配置が存在することから, 再帰配置・非再帰配置を合わせた全ての安定配置数は L 次元空間における一辺を A とする超立方体の体積 A^L である. (Figure 2.5 の例では, 正方形 $5^2 = 25$.) そのうち, 再帰配置 (Unit Cell に含まれる配置) の数は Unit Cell の体積と等しい. 一方 Dhar

の行列の各列ベクトルはこの Unit Cell どうしの同等な点を結ぶものであり、この基本ベクトルを陵とする平行多面体による新たな Unit Cell (Figure 2.5 では点線で囲まれた部分) は、もとの Unit Cell と同じ体積をもつ。よって、

$$[\text{再帰配置数}] = \det \Delta \quad (2.14)$$

である³。Figure 2.5 では太線内の再帰配置 (○) の数は 21 である。一方 Dhar の行列式は、

$$\det \Delta = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 25 - 4 = 21$$

で等しい。

2.3.3 再帰配置の同等性

再帰配置 z には (2.13) 式, $[z + C a] = z$ を満たす a が存在する。この z の Site i へ追加が行われた配置 $[z + C a_i]$ に対して同じ a の追加をすると、追加の可換性からもとの $[z + C a_i]$ に安定化し、定義によりこれも再帰配置である。

$$\begin{aligned} [[z + C a_i] + C a] &= [[z + C a] + C a_i] \\ &= [z + C a_i] \end{aligned}$$

このことから一度再帰配置を経験すると非再帰配置になることはなく、“再帰配置の集合は閉じている。”

一回の追加で z から遷移していく配置は、Sites 数のぶんだけあり L 通りである。逆に再帰配置が閉じていることから

$$[z' + C a_i] = z$$

を満たし再帰配置に属する z' 、つまり追加される前の再帰配置

$$z' = [z - C a_i]$$

は各 i に対して存在し、やはり L 通りである。全ての再帰配置 z は Figure 2.6 のように、追加前の L 個の再帰配置と追加後の L 個の再帰配置から構成され、追加される Site が等確率で選ばれる以上、“全ての再帰配置が等しい確率で出現する。”[13]

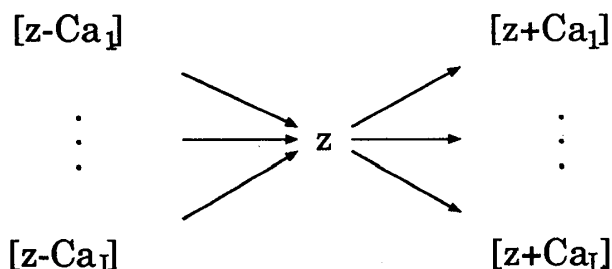


Figure 2.6: 再帰配置の同等性

状態空間における Random Walk は一步の大きさが C のとびとびの移動であるが、 A, B, C が公約数を持たないために全ての再帰配置に到達することができ同等性は保たれる。公約数をもつ場合には、全ての

³各陵が Δ の列ベクトルで与えられる平行多面体の体積は Δ の行列式に等しい。(線形代数の本, 例えば [19] P.170.)

再帰配置のうち $\frac{1}{\text{最大公約数}}$ だけに到達することができ、到達し得る再帰配置の組合せは初期配置に依存する。このとき最大公約数で割って得られる公約数をもたない組の Model と 1 対 1 に対応し、再帰配置数やなだれなどの性質が等しい。また小数や分数である組はこの状態空間のきざみが小さいだけで、定数倍して得られる整数の組とやはり定性的に等しい。

2.3.4 再帰性の判定

(2.13) 式を満たす $C a$ の最も効率的なものとして、再帰配置が同等であることから $C = 1$ の場合の追加の仕方 a_R を求める。この式を Dhar の行列を用いて書き直すと、

$$z + a_R - \Delta t = z$$

であるからこのとき、

$$a_R = \Delta t \quad (2.15)$$

となる。よって a_R は最も少ない崩落回数 t の中から求める。

1. もし t の i 成分 t_i が 0 で、隣接 Sites 部分のどれかに $t_{n,n} \geq 1$ が存在すると、

$$\begin{aligned} (a_R)_i &= (\Delta t)_i \\ &= A \cdot t_i - \left(\sum t_{n,n} \right) \cdot B < 0 \end{aligned}$$

となり、 a_R が負の成分をもつことになってしまうので不適。隣接 Sites $t_{n,n}$ の全てを 0 とすると、その周り部分もやはり 0 でなければならず、結局 $t = 0$ 。このとき $a_R = 0$ となり命題に反する。よって t は 0 の成分をもたない。

2. t の全ての成分を 1 とすると、 a_R の成分は (2.4) 式から、

$$\begin{aligned} (a_R)_i &= A \cdot t_i - \left(\sum t_{n,n} \right) \cdot B \\ &\geq A - 2N \cdot B \geq 0 \end{aligned}$$

である。(これは開放、閉鎖、周期境界における端 Sites でも成り立つ。) よって t の全ての成分が 1 であるとした場合の Δt を判定の追加 a_R に選ぶ。この各成分は、全ての Sites が 1 回ずつ崩落したときに各 Site が失う粒子数である。

このとき Dhar の行列の列ベクトルの結合の重みが全て 1 で、状態空間の考察からも最も効率的であることが分かる。Figure 2.5 の例では、再帰配置 (太線内の領域) であれば、

$$a_R = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

の追加によりその肩に乗っている領域の対応する配置に移動、安定化すればもとに配置に戻る。非再帰配置である場合は a_R の追加により安定な再帰配置に移動するので、もとの配置には戻ってこない。

まとめると再帰性の判定は a_R の各成分を、

$(a_R)_i$: 系の全ての Sites が 1 回ずつ崩落したときに Site i が失う粒子数。

とすると安定配置 z にこれを加え、

$$\begin{cases} [z + a_R] = z & \longrightarrow \text{再帰配置} \\ [z + a_R] \neq z & \longrightarrow \text{非再帰配置} \end{cases}$$

である。

Chapter 3

1 次元 Model の厳密解

本章は1次元 Model を対象とし, まず各境界条件に対する再帰配置数を Dhar の行列から求める (3.1節). 次に Site の状態を3つの Group に分類, 各 Group に対する性質を示す (3.2節). またその性質から, 各 Group の出現確率を求め (3.3節), なだれが発生しない確率 (3.4節), 規模 s のなだれの出現確率 (3.5節) を計算する. 最後に $B = C$ の場合のなだれ分布を示し, BTW Model との関係についてふれる (3.6節).

3.1 各境界に対する再帰配置数

Dhar の行列 Δ の行列式はその系における再帰配置数である (2.3.2小節) 本節はこのことからまず両開の再帰配置数を求め, それを用いることにより他の境界の場合の再帰配置数を求める.

3.1.1 両開の場合

両端が開放境界 (両開) の Dhar の行列は,

$$\Delta_{op.op} = \begin{bmatrix} A & -B & & & \\ -B & A & -B & & \\ & -B & A & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -B \\ & & & -B & A \end{bmatrix}$$

である. この行列 ($l \times l$) の行列式を余因子展開する.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & -B & & & \\ -B & A & -B & & \\ & -B & A & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -B \\ & & & -B & A \end{vmatrix} &= A \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} -B & & & \\ -B & A & -B & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -B & A \end{vmatrix} \\ &= A \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} - B^2 \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -B & A \end{vmatrix} \end{aligned}$$

まず第1列を第1行 (A) と第2行 ($-B$) それぞれの余因子に展開, 展開後の2項目は第1行と第1列 ($-B$) の余因子に展開した. これは再帰配置数 $N(l)$ に対して漸化式となっている.

$$N(l) = A N(l-1) - B^2 N(l-2) \quad (3.1)$$

前の2項により次項が決定されるこの漸化式の一般項を行列を用いて求める.

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} N(l) \\ N(l-1) \end{bmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} N(l) &= A N(l-1) - B^2 N(l-2) \\ N(l-1) &= N(l-1) \end{aligned}$$

であるから一階の方程式となり以下を得る.

$$\mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} A & -B^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{l-1} = \begin{bmatrix} A & -B^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \mathbf{u}_{l-2} = \cdots = \begin{bmatrix} A & -B^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{l-2} \mathbf{u}_2 \quad (3.2)$$

この行列の $(l-2)$ 乗を求めるため対角化する. 固有値は,

$$\lambda_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2} \quad (3.3)$$

であり (このとき (2.4) 式から $A \geq 2B$), 固有ベクトルはそれぞれ,

$$\lambda_1 \text{ のとき } \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 \text{ のとき } \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & -B^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{l-2} &= \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^{l-2} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{l-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{l-2} \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. また初期値 \mathbf{u}_2 の成分は,

$$\begin{aligned} N(2) &= \begin{vmatrix} A & -B \\ -B & A \end{vmatrix} = A^2 - B^2 = \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 \\ N(1) &= |A| = A = \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

である. これらを (3.2) 式に代入して一般項を得る.

$$\begin{aligned} N(l) &= \frac{\lambda_1^{l+1} - \lambda_2^{l+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \left\{ \left(\frac{A + \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2} \right)^{l+1} - \left(\frac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2} \right)^{l+1} \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

逸脱率 $d (= \frac{A}{B} - 2)$ を用いて表すと,

$$\begin{aligned} N(l) &= \frac{B^l}{\sqrt{d(d+4)}} \left[\left\{ \frac{d+2+\sqrt{d(d+4)}}{2} \right\}^{l+1} - \left\{ \frac{d+2-\sqrt{d(d+4)}}{2} \right\}^{l+1} \right] \\ &= \frac{B^l}{\sqrt{d(d+4)}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{d+4} + \sqrt{d}}{2} \right)^{2l+2} - \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^{2l+2} \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

3.1.2 開閉の場合

一方が開放境界, 他方が閉鎖境界 (開閉) の Dhar の行列は,

$$\Delta_{op-cl} = \begin{bmatrix} (A-B) & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{bmatrix}$$

である. 行列式は第 1 行に関して線形であるから, 上で求めた両開の行列式で表すことができる.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A-B & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -B & & & \\ -B & A & -B & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

前小節求めた (3.4) 式の $N(l)$ を用いて系 l 開閉の再帰配置数は,

$$N_{op-cl}(l) = N(l) - B N(l-1) \quad (3.6)$$

となる.

3.1.3 両閉の場合

両端が閉鎖境界 (両閉) の Dhar の行列は,

$$\Delta_{cl-cl} = \begin{bmatrix} (A-B) & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & A & -B \\ & & & -B & (A-B) \end{bmatrix}$$

である. 開閉のときと同様に両開の行列式で表す. 第 1 行と第 l 行に行列式の線形性を用いるが, それぞれの行に対して別々に線形であることに注意する. 行列式は,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A-B & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A-B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -B & & & \\ -B & A & -B & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -B & A \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} A & -B & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -B & A & -B \\ & & & -B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -B & & & \\ -B & A & -B & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -B \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} - 2B \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} + B^2 \begin{vmatrix} A & -B \\ -B & \ddots \end{vmatrix}$$

となる. 系 l 両閉の再帰配置数を $N(l)$ で表すが, 漸化式 (3.1) により $N(l-2)$ の項を消去する.

$$\begin{aligned} N_{cl-cl}(l) &= N(l) - 2B N(l-1) + B^2 N(l-2) \\ &= (A - 2B) N(l-1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1.4 周期の場合

周期境界 (周期) の Dhar の行列 $\det \Delta_{cycle}$ は,

$$\Delta_{cycle} = \begin{bmatrix} A & -B & & -B \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ -B & & -B & A \end{bmatrix}$$

である. 開閉, 両閉と同様に行列式は,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & -B & & -B \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ -B & & -B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & -B \\ -B & A & -B & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -B & A \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} A & -B & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -B & A & -B \\ -B & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & -B \\ -B & A & -B & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ -B & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる. ここで2項目の行列式は, 第1列と第2行の余因子に展開することを繰り返して,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} & & & -B \\ -B & A & -B & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -B & A \end{vmatrix} &= B \begin{vmatrix} & & -B \\ -B & A & \\ & \ddots & \ddots \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ &= B^{l-2} \begin{vmatrix} 0 & -B \\ -B & A \end{vmatrix} = -B^l \end{aligned}$$

となる. 3項目も同じ値となる. 4項目も余因子展開することで以下を得る.

$$\begin{vmatrix} A & -B & & -B \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ -B & & -B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -B & & \\ -B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -B \\ & & -B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & -B \\ -B & \ddots \end{vmatrix} - 2B^l$$

系 l 周期の再帰配置数を $N(l)$ で表すが, 漸化式 (3.1) を用いて,

$$\begin{aligned} N_{cycle}(l) &= N(l) - B^2 N(l-2) - 2B^l \\ &= 2N(l) - A N(l-1) - 2B^l \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる.

3.1.5 まとめ

以上, 各境界の再帰配置数をまとめる.

$$\begin{aligned} \text{両開: } N_{op \cdot op}(l) &= N(l) \\ \text{開閉: } N_{op \cdot cl}(l) &= N(l) - B N(l-1) \\ \text{両閉: } N_{cl \cdot cl}(l) &= (A - 2B) N(l-1) \\ \text{周期: } N_{cycle}(l) &= 2N(l) - A N(l-1) - 2B^l \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} N(l) &= \frac{1}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \left\{ \left(\frac{A + \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2} \right)^{l+1} - \left(\frac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2} \right)^{l+1} \right\} \\ &= \frac{B^l}{\sqrt{d(d+4)}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{d+4} + \sqrt{d}}{2} \right)^{2l+2} - \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^{2l+2} \right\} \end{aligned}$$

である.

3.2 Site の状態 (I, II, III)

再帰判定 (2.3.4小節) において, 1次元では端以外の Site へ追加する粒子は逸脱数 $D = A - 2B$ ($= B \cdot d$) である. Site の状態 ($0 \leq z \leq A-1$, 状態数 A) は “再帰判定の際のふるまいから”, 以下の3つの Group に分類することができる (Figure 3.1).

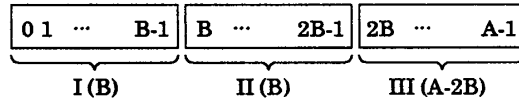


Figure 3.1: Site 状態の I, II, III Group. 括弧内は状態数.

I Group $0 \leq z_I \leq B-1$ (状態数 B)

D の追加では $z_I + D = z_I + A - 2B < A$ で安定, どちらか一方の隣接 Site が崩落しても $z_I + D + B = z_I + A - B < A$ でやはり安定, 両側が崩落することで $z_I + D + 2B = z_I + A \geq A$ となり崩落する. “なだれを止める.”

II Group $B \leq z_{II} \leq 2B-1$ (状態数 B)

D の追加では $z_{II} + D < A$ であるが, どちらか一方の隣接 Site が崩落することで $z_{II} + D + B \geq A$ となり崩落する. “なだれを止めることも起点となることもない.”

III Group $2B \leq z_{III} \leq A-1$ (状態数 $A-2B$)

D の追加により $z_{III} + D \geq A$ となり崩落を起こす. “なだれの起点となる.”

3.2.1 I, II, III の配置規則

境界を考えない場合、再帰配置であれば各 Site に D を追加すると元の配置に安定化するが、その際に各 Site は 1 度ずつ崩落する。逆にこのことを満たすような配置が再帰配置である。このことから、再帰配置における各 Group の配置規則を考える。

I の Site は両側 Sites の崩落により崩落を起こすのであるから、連続して並ぶことは許されない。I の Sites 間には II だけでは不十分で、なだれの起点となる III の Site が存在しなければならない。II の Site はなだれを止めることも起点となることもなく、再帰配置は II の Site の配置に依存しない。これを満たす配置は、各 Site への D の追加により全ての Sites が崩落する。

以上をまとめると、再帰配置の境界以外の部分は、これら 3 つの Group が以下の関係によって配置される。

“I と I の間には III の Site が存在, II の配置は Random である。”

境界における配置規則は次小節以降により示される。

3.2.2 I の周囲の配置

状態が I の Site は、その周りの部分と以下の関係をもつ。

“再帰配置においてある Site が I であるとする、その Site の右側部分や左側部分に許される配置はそこを閉鎖境界としたそれぞれが独立な系の再帰配置である。”

Figure 3.2 の (a) は Site i の状態が I である配置を表している。この配置が再帰的であるとき、各 Site に D を加えると 1 度ずつ崩落を起こして配置 (a) に安定化する (b, c) が、このとき I はなだれを止めるから両隣の Sites が崩落すること (b) によって初めて崩落する (c)。一方、閉鎖境界の端をもつ (d, f) の再帰性の判定 (e, g) は境界の外側から粒子を得ることなしに崩落しなければならず、これを満たす配置は (a) の左右部分に許される配置と等しい。左右部分は Site i に粒子を渡す (b) が、Site i の崩落によりそのぶんが戻って来る (c) ため、閉鎖境界の場合 (e, g) と同じことになっている。

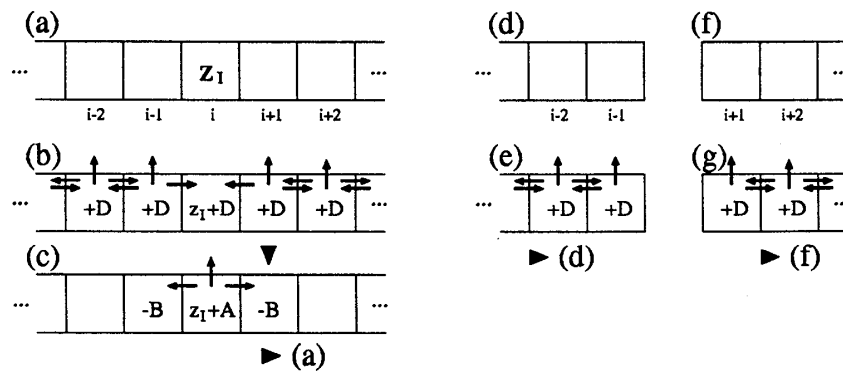


Figure 3.2: I の周囲の配置

閉鎖境界における I, II, III の配置規則は、境界の外側が I であると考えればよい。つまり境界と境界に最も近い I との間に III が存在しなければならない。

3.2.3 II の周囲の配置

状態が II の Site はその周りの部分と以下の関係をもつ。

“再帰配置においてある Site が II であるとする、その Site の周りの部分に許される配置はそこを除いた 1 つ小さい系の再帰配置である。”

Figure 3.3 の (a) は Site i の状態が II である配置を表している。この配置が再帰的であるとする、再帰判定 (b) により全ての Site が 1 回ずつ崩落、そのとき II はなだれを止めることも起点となることもない。よって Site i の周りの配置は、Site i を除いて 1 つ小さくなった系 (c) の再帰性の判定 (d) を満たす配置と等しい。

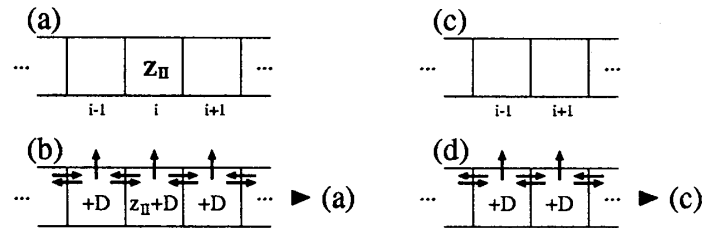


Figure 3.3: II の周囲の配置

3.2.4 III の周囲の配置

状態が III の Site は周りの部分と以下の関係をもつ。

“再帰配置においてある Site が III であるとする、その Site の右側部分や左側部分に許される配置はそこを開放境界としたそれぞれが独立な系の再帰配置である。”

Figure 3.4 の (a) は Site i の状態が III である配置を表している。これが再帰配置であるとする、 D の追加により Site i 自身が崩落、両隣に B ずつ配り (b), 安定化 (c) する。一方、開放境界の端をもつ (d, f) の再帰性の判定 (e, g) では端 Site に $(D+B)$ を追加する。これを満たす配置は配置 (a) の左右部分への許される配置と等しい。

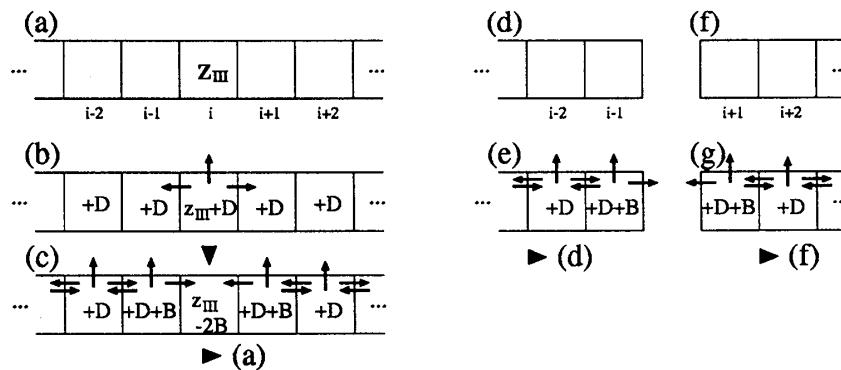


Figure 3.4: III の周囲の配置

開放境界における I, II, III の配置規則は、境界の外側が III であると考えればよい。つまり境界と境界に最も近い I との間に III が存在する必要はない。

3.3 I, II, III の出現確率

前節で得られた性質から, 系 l 周期境界において, ある Site が属する Group によってそれを除いた Sites $1 \sim (l-1)$ の部分には

$$\begin{cases} \text{I の場合} & \text{両閉} \\ \text{II の場合} & \text{周期} \\ \text{III の場合} & \text{両開} \end{cases}$$

の再帰配置が許される (Figure 3.5).

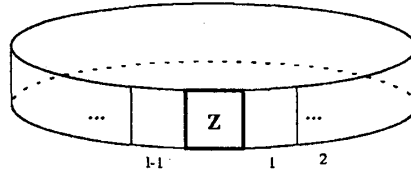


Figure 3.5: 系 l 周期におけるある Site とその周囲 (Site $1 \sim l-1$) 部分

同じ Group に属する状態はその周囲に許される配置の数が等しく, 再帰配置の同等性 (2.3.3節) から出現確率が等しい. 各 Group の出現確率をまず周期境界で求め, その極限をとることにより無限系に対して求める.

3.3.1 I の出現確率

系 l 周期の総配置数 $N_{cycle}(l)$ のうち, ある Site の状態が I である場合の数は系 $(l-1)$ 両閉の配置数 $N_{cl-cl}(l-1)$ である. よって出現確率 P_I は,

$$\begin{aligned} P_I &= \frac{N_{cl-cl}(l-1)}{N_{cycle}(l)} \\ &= \frac{(A-2B)N(l-2)}{2N(l) - AN(l-1) - 2B^l} \\ &= \frac{(A-2B)\{-N(l) + AN(l-1)\}}{B^2\{2N(l) - AN(l-1) - 2B^l\}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

である (漸化式 (3.1) を用いた).

$\lambda_1 (= \frac{A+\sqrt{A^2-4B^2}}{2}) > \lambda_2 (= \frac{A-\sqrt{A^2-4B^2}}{2})$ であるから, $n \rightarrow \infty$ のとき $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n \rightarrow 0$. よって,

$$N(n) = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} = \frac{\lambda_1^{n+1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n+1} \right\} \rightarrow \frac{\lambda_1^{n+1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}}$$

となる. また (2.4) 式より $A \geq 2B$ であるから $\lambda_1 > B$ で, $n \rightarrow \infty$ では $(\frac{B}{\lambda_1})^n \rightarrow 0$ となる. これらから $l \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} P_I &\rightarrow \frac{(A-2B)(-\lambda_1 + A)}{B^2(2\lambda_1 - A)} \\ &= \frac{1}{2B^2} \left\{ -(A-2B) + \frac{A\sqrt{A^2-4B^2}}{A+2B} \right\} \\ &= \frac{1}{2B} \left\{ -d + \frac{(d+2)\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる.

3.3.2 II の出現確率

系 l 周期の総配置数 $N_{cycle}(l)$ のうち, ある Site の状態が II である場合の数は系 $(l-1)$ 周期の配置数 $N_{cycle}(l-1)$ である. よって出現確率 P_{II} は,

$$\begin{aligned}
 P_{II} &= \frac{N_{cycle}(l-1)}{N_{cycle}(l)} \\
 &= \frac{2N(l-1) - A N(l-2) - 2B^{l-1}}{2N(l) - A N(l-1) - 2B^l} \\
 &= \frac{A N(l) - (A^2 - 2B^2) N(l-1) - 2B^{l+1}}{B^2 \{2N(l) - A N(l-1) - 2B^l\}}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

である.

$l \rightarrow \infty$ では (3.11) の 2 番目の式から I のときと同様にして,

$$\begin{aligned}
 P_{II} &\longrightarrow \frac{2\lambda_1 - A}{2\lambda_1^2 - A\lambda_1} \\
 &= \frac{1}{\lambda_1} \\
 &= \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2B^2} \\
 &= \frac{1}{2B} \left\{ d + 2 - \sqrt{d(d+4)} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる.

3.3.3 III の出現確率

系 l 周期の総配置数 $N_{cycle}(l)$ のうち, ある Site の状態が III である場合の数は系 $(l-1)$ 両開の配置数 $N_{op \cdot op}(l-1)$ である. よって出現確率 P_{III} は,

$$\begin{aligned}
 P_{III} &= \frac{N_{op \cdot op}(l-1)}{N_{cycle}(l)} \\
 &= \frac{N(l-1)}{2N(l) - A N(l-1) - 2B^l}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

である.

$l \rightarrow \infty$ では I, II のときと同様にして,

$$\begin{aligned}
 P_{III} &\longrightarrow \frac{1}{2\lambda_1 - A} \\
 &= \frac{\sqrt{A^2 - 4B^2}}{A^2 - 4B^2} \\
 &= \frac{1}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d(d+4)}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

となる.

3.3.4 まとめ

無限系 ($l \rightarrow \infty$) における状態 I, II, III の出現確率をまとめる.

$$P_I \longrightarrow \frac{1}{2B} \left\{ -d + \frac{(d+2)\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \right\}$$

$$P_{\text{II}} \rightarrow \frac{1}{2B} \left\{ d+2 - \sqrt{d(d+4)} \right\}$$

$$P_{\text{III}} \rightarrow \frac{1}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d(d+4)}$$

この各 Group の出現確率に状態数を掛け、和をとると 1 になる.

$$B \cdot P_{\text{I}} + B \cdot P_{\text{II}} + (A-2B) \cdot P_{\text{III}} = 1$$

3.4 規模 0 のなだれの出現確率

本節では無限系において崩落が起きない確率 (規模 0 のなだれの出現確率) を求める.

追加される Site の状態が $z \leq (A-C-1)$ のとき, 追加粒子 C ($1 \leq C \leq A-1$) を加えても $z+C < A$ で崩落を起こさず, そのときなだれ規模は 0 である. この $z \leq (A-C-1)$ の確率は, 前節で求めた各 Group の出現確率を用いて表すことができる. 安定 (Stable) と崩落 (Topple) を分けるしきい値 $(A-C)$ と I, II, III Group を分ける境界値 $(B, 2B)$ の関係により, 以下に場合分けして考える.

3.4.1 $0 < \frac{C}{B} \leq d$ の場合

$2B \leq (A-C) \leq (A-1)$ のとき $\frac{1}{B} \leq \frac{C}{B} \leq (\frac{A}{B}-2)$ で, これを $d (= \frac{A}{B}-2)$ を用いて表すと $0 < \frac{C}{B} \leq d$ である. 崩落のしきい値は III Group を分ける (Figure 3.6).

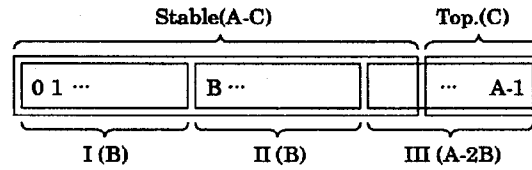


Figure 3.6: $0 < \frac{C}{B} \leq d$, 崩落のしきい値が III Group を分ける場合. 括弧内は状態数.

Figure 3.6 からそれぞれの Group の状態と状態数を Table 3.1 に示す.

	Group	状態	状態数
Stable	I	$0 \sim (B-1)$	B
	II	$B \sim (2B-1)$	B
	III \cap Sta.	$2B \sim (A-C-1)$	$A-2B-C$
Topple	III \cap Top.	$(A-C) \sim (A-1)$	C

Table 3.1: $0 < \frac{C}{B} \leq d$, それぞれの Group の状態と状態数.

安定な Group は Table 3.1 から I, II, および III \cap Sta. で, 各 Group の出現確率により規模 0 のなだれの出現確率は,

$$P(0) = B \cdot P_{\text{I}} + B \cdot P_{\text{II}} + (A-2B-C) \cdot P_{\text{III}}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - CP_{\text{III}} \\
 &\rightarrow 1 - \frac{C\sqrt{A^2 - 4B^2}}{A^2 - 4B^2} \\
 &= 1 - \frac{C}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d(d+4)}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

である.

3.4.2 $d < \frac{C}{B} \leq (d+1)$ の場合

上と同様に $B \leq (A-C) \leq (2B-1)$ のとき $(\frac{A}{B} - 2 + \frac{1}{B}) \leq \frac{C}{B} \leq (\frac{A}{B} - 1)$ で, このとき $d < \frac{C}{B} \leq (d+1)$ である. 崩落のしきい値は II Group を分ける (Figure 3.7).

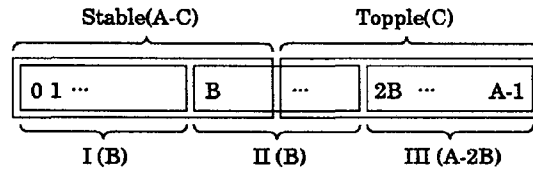


Figure 3.7: $d < \frac{C}{B} \leq (d+1)$, 崩落のしきい値が II Group を分ける場合. 括弧内は状態数.

Figure 3.7 からそれぞれの Group の状態と状態数を Table 3.2 に示す.

	Group	状態	状態数
Stable	I	$0 \sim (B-1)$	B
	II \cap Sta.	$B \sim (A-C-1)$	$A-B-C$
Topple	II \cap Top.	$(A-C) \sim (2B-1)$	$2B+C-A$
	III	$2B \sim (A-1)$	$(A-2B)$

Table 3.2: $d < \frac{C}{B} \leq (d+1)$, それぞれの Group の状態と状態数.

安定な Group は Table 3.2 から I および II \cap Sta. で, 規模 0 のなだれの出現確率は,

$$\begin{aligned}
 P(0) &= B \cdot P_I + (A - B - C) \cdot P_{\text{II}} \\
 &\rightarrow \frac{Z_1 + C Z_2}{2B^2(A + 2B)} \\
 &\quad \begin{cases} Z_1 = A^3 - 2AB^2 + 4B^3 + (-A^2 + 2B^2)\sqrt{A^2 - 4B^2} \\ Z_2 = -A^2 - 2AB + (A + 2B)\sqrt{A^2 - 4B^2} \end{cases} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ Z'_1 + \frac{C}{B} Z'_2 \right\} \\
 &\quad \begin{cases} Z'_1 = d^2 + 2d + 2 - \frac{(d^2 + 4d + 2)\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \\ Z'_2 = -(d+2) + \sqrt{d(d+4)} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

である.

3.4.3 $(d+1) < \frac{C}{B} < (d+2)$ の場合

$1 \leq (A-C) \leq (B-1)$ のとき $(\frac{A}{B}-1+\frac{1}{B}) \leq \frac{C}{B} \leq (\frac{A}{B}-\frac{1}{B})$ で、このとき $(d+1) < \frac{C}{B} < (d+2)$ である。崩落のしきい値は I Group を分ける (Figure 3.8).

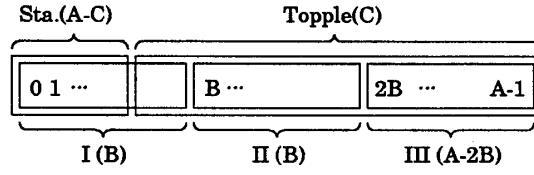


Figure 3.8: $(d+1) < \frac{C}{B} < (d+2)$, 崩落のしきい値が I Group を分ける場合. 括弧内は状態数.

Figure 3.8 からそれぞれの Group の状態と状態数を Table 3.3 に示す.

	Group	状態	状態数
Stable	I \cap Sta.	$0 \sim (A-C-1)$	$A-C$
Topple	I \cap Top.	$(A-C) \sim (B-1)$	$B+C-A$
	II	$B \sim (2B-1)$	B
	III	$2B \sim (A-1)$	$(A-2B)$

Table 3.3: $(d+1) < \frac{C}{B} < (d+2)$, それぞれの Group の状態と状態数.

安定な Group は Table 3.3 から I \cap Sta. で、規模 0 のなだれの出現確率は、

$$\begin{aligned}
 P(0) &= (A-C) \cdot P_1 \\
 &\rightarrow \frac{(A-C)(-A^2+4B^2+A\sqrt{A^2-4B^2})}{2B^2(A+2B)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(d+2 - \frac{C}{B} \right) \left\{ -d + \frac{(d+2)\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

である.

3.4.4 まとめ

無限系 ($l \rightarrow \infty$) に対する規模 0 のなだれの出現確率をまとめる.

$$\begin{aligned}
 P(0) &\rightarrow 1 - \frac{C}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d(d+4)}, \quad \left(0 < \frac{C}{B} \leq d \right) \\
 P(0) &\rightarrow \frac{1}{2} \left\{ Z'_1 + \frac{C}{B} Z'_2 \right\}, \quad \left(d < \frac{C}{B} \leq d+1 \right) \\
 &\quad \left\{ \begin{aligned} Z'_1 &= d^2 + 2d + 2 - \frac{(d^2+4d+2)\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \\ Z'_2 &= -(d+2) + \sqrt{d(d+4)} \end{aligned} \right\} \\
 P(0) &\rightarrow \frac{1}{2} \left(d+2 - \frac{C}{B} \right) \left\{ -d + \frac{(d+2)\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \right\}, \quad \left(d+1 < \frac{C}{B} < d+2 \right)
 \end{aligned}$$

3.5 規模 $s (= 1, 2, \dots)$ のなだれの出現確率

本節では無限系での規模 $s (= 1, 2, \dots)$ のなだれの出現確率を, 3.3節での I, II, III の出現確率のときと同様な方法で, 周期の極限をとることにより求める. ここでなだれの規模とは“崩落を起こした Sites の数”である.

追加される Site の状態が $z \geq (A-C)$ のときその Site は崩落を起こし, 隣接 Sites が $z \geq (A-B)$ であれば粒子 B を受け取ることで波及する. この波及は $z \leq (A-B-1)$ の Sites によって止められる. このことから系 l 周期に規模 s ($1 \leq s \leq l-2$) のなだれが起きるとき, 追加される Site の周りには波及の $(s-1)$ Sites が連続し (Figure 3.9 の Cluster), その両隣に抑止の Sites (Figure 3.9 の L, R) が存在する.

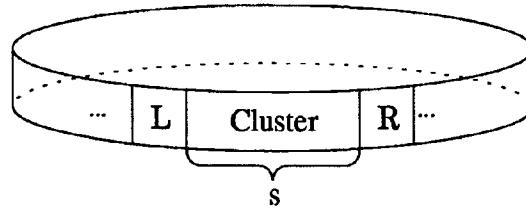


Figure 3.9: 規模 s のなだれの配置. Cluster は 1 つの Site が $z \geq (A-C)$ で, 他が $z \geq (A-B)$. L と R は $z \leq (A-B-1)$.

よってこの領域 (Cluster と L, R Sites) を構成する Group の全ての組み合わせに対して領域外の部分に許される配置数を求め, それが系 l 周期の全ての再帰配置数にしめる比率が規模 s のなだれの出現確率である.

Cluster に III の Site が全く存在しない配置は, 1 つでも存在する場合と周りの部分に許される配置が異なる. このことから, 追加される Site の崩落のしきい値 $(A-C)$ およびその崩落からの波及のしきい値 $(A-B)$ と, I, II, III Group を分ける境界値 $(B, 2B)$ の関係により場合を分けて考える.

3.5.1 $d \geq 1$ の場合

$2B \leq (A-B) \leq (A-1)$ のとき $d = (\frac{A}{B}-2) \geq 1$ で, 波及のしきい値は III Group を分ける (Figure 3.10). このときは Cluster の波及 Sites が全て III で構成され, Cluster に III が存在する場合である.

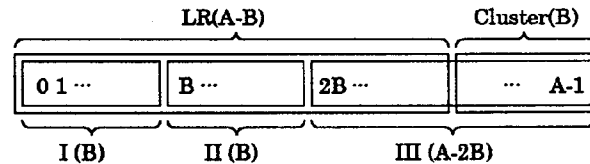


Figure 3.10: $d \geq 1$, 波及のしきい値と I, II, III Group の境界値の関係. 括弧内は状態数.

Figure 3.10 からそれぞれの Group の状態と状態数を Table 3.4 に示す.

Figure 3.6, 3.7, 3.8 および Table 3.1, 3.2, 3.3 から Cluster における追加 Site の状態数は C である. また Figure 3.10 および Table 3.4 から波及 Sites のそれぞれの要素は $\text{III} \cap \text{Clu.}$ で構成され状態数は B である. 追加位置は l Sites のなかから s 通り考えられる ($\frac{s}{l}$) のであるが, Cluster をずらして 1 周分の l 通りだけこの配置はあるので, l は相殺され $\frac{s}{l} \cdot l = s$. Cluster の場合の数は “ $C \cdot B^{s-1} \cdot s$ ” である. 抑止の L,

	Group	状態	状態数
LR	I	$0 \sim (B-1)$	B
	II	$B \sim (2B-1)$	B
	III \cap LR	$2B \sim (A-B-1)$	$A-3B$
Cluster	III \cap Clu.	$(A-B) \sim (A-1)$	B

Table 3.4: $d \geq 1$, それぞれの Group の状態と状態数

R を構成する Group は以下に場合分けされ, それぞれの場合に領域外の部分に許される配置を考え, 場合の数を求める.

- $(L, R) = (I, I)$ のとき,
L, R Sites の場合の数は B^2 . この領域の周りの部分に許される配置は, I Group の性質から, 系 $l-(s+2) = (l-s-2)$ の両閉の再帰配置である. よってこのときの場合の数は,

$$(CB^{s-1}s) \cdot B^2 \cdot N_{cl-cl}(l-s-2)$$

- $(L, R) = (I, II), (II, I)$ のとき,
以下同様に, L, R Sites の場合の数は B^2 , 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の開閉の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot 2B^2 \cdot N_{op-cl}(l-s-2)$$

- $(L, R) = (I, III \cap LR), (III \cap LR, I)$ のとき,
L, R Sites の場合の数は $B(A-3B)$, 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の開閉の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot 2B(A-3B) \cdot N_{op-cl}(l-s-2)$$

- $(L, R) = (II, II)$ のとき,
L, R Sites の場合の数は B^2 , 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の両開の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot B^2 \cdot N_{op-op}(l-s-2)$$

- $(L, R) = (II, III \cap LR), (III \cap LR, II)$ のとき,
L, R Sites の場合の数は $B(A-3B)$, 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の両開の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot 2B(A-3B) \cdot N_{op-op}(l-s-2)$$

- $(L, R) = (III \cap LR, III \cap LR)$ のとき,
L, R Sites の場合の数は $(A-3B)^2$, 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の両開の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot (A-3B)^2 \cdot N_{op-op}(l-s-2)$$

これらの和が総配置数 (系 l 周期の再帰配置数, $N_{cycle}(l)$) に占める比率がなだれ規模 s の出現確率である.

$$P(s) = \frac{CB^{s-1}s}{N_{cycle}(l)} \{ B^2 N_{cl-cl}(l-s-2) + 2B(A-2B) N_{op-cl}(l-s-2) + (A-2B)^2 N_{op-op}(l-s-2) \} \quad (3.18)$$

3.1節の各境界の再帰配置数は極限 ($n \rightarrow \infty$) ではそれぞれ,

$$\begin{aligned} N_{op.op}(n) &= N(n) = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \rightarrow \frac{\lambda_1^{n-1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \cdot \lambda_1^2 \\ N_{op.cl}(n) &= N(n) - B N(n-1) \rightarrow \frac{\lambda_1^{n-1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \cdot \lambda_1(\lambda_1 - B) \\ N_{cl.cl}(n) &= N(n) - 2B N(n-1) + B^2 N(n-2) \rightarrow \frac{\lambda_1^{n-1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \cdot (\lambda_1 - B)^2 \\ N_{cycle}(n) &= N(n) - B^2 N(n-2) - 2B^n \rightarrow \frac{\lambda_1^{n-1}}{\sqrt{A^2 - 4B^2}} \cdot (\lambda_1^2 - B^2) \end{aligned}$$

($\lambda_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2}$) である. これらにより, (3.18) 式の極限 ($l \rightarrow \infty$) から無限系に対して求めると,

$$P(s) \longrightarrow X \cdot Y^s \cdot s \quad (3.19)$$

ただし,

$$\begin{aligned} X &= \frac{C\{(A-B)\lambda_1 - B^2\}^2}{B\lambda_1^2(\lambda_1 + B)(\lambda_1 - B)} \\ &= \frac{C\sqrt{A^2 - 4B^2}}{B(A + 2B)} \\ &= \frac{C}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \\ Y &= \frac{B}{\lambda_1} \\ &= \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2B} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ d + 2 - \sqrt{d(d+4)} \right\} \\ &= \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

である.

3.5.2 $0 < d < 1$ の場合

($B+1 \leq (A-B) \leq (2B-1)$) のとき $0 < d < 1$ で, なだれのしきい値は II Group を分ける (Figure 3.11).

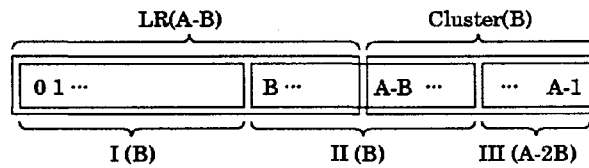


Figure 3.11: $d < 1$, 波及のしきい値と I, II, III Group の境界値の関係. 括弧内は状態数.

Figure 3.11 からそれぞれの Group の状態と状態数を Table 3.5 に示す.

$d \geq 1$ の場合と同様であるが, 波及 Sites に III の Site が全く存在しない場合がある. ただし 3.4節から, $\frac{C}{B}$ の範囲によっては追加 Site が III に限られ, さらに場合を分ける.

	Group	状態	状態数
LR	I	$0 \sim (B-1)$	B
	$\text{II} \cap \text{LR}$	$B \sim (A-B-1)$	$A-2B$
Cluster	$\text{II} \cap \text{Clu.}$	$(A-B) \sim (2B-1)$	$3B-A$
	III	$2B \sim (A-1)$	$A-2B$

Table 3.5: $0 < d < 1$, それぞれの部分の状態と状態数 $0 < \frac{C}{B} \leq d$ の場合

Figure 3.6 および Table 3.1 から $0 < \frac{C}{B} \leq d$ の場合には追加 Site が III でなければならず, 状態数は C である. また Figure 3.11 および Table 3.5 から波及 Sites のそれぞれの要素は $\text{II} \cap \text{Clu.}$ と III で構成され, 状態数は $(3B-A) + (A-2B) = B$ である. 追加位置は $\frac{s}{l} \cdot l = s$ 通りであるから, Cluster の場合の数は “ $C \cdot B^{s-1} \cdot s$ ” である. L, R を構成する Group は以下に場合分けされ, それぞれの領域外の部分に許される配置を考え, 場合の数を求める.

- $(L, R) = (I, I)$ のとき,

L, R Sites の場合の数は B^2 , 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の両開の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot B^2 \cdot N_{cl-cl}(l-s-2)$$

- $(L, R) = (I, \text{II} \cap \text{LR}), (\text{II} \cap \text{LR}, I)$ のとき,

L, R Sites の場合の数は $B(A-2B)$, 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の開閉の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot 2B(A-2B) \cdot N_{op-cl}(l-s-2)$$

- $(L, R) = (\text{II} \cap \text{LR}, \text{II} \cap \text{LR})$ のとき,

L, R Sites の場合の数は $(A-2B)^2$, 周りの部分は系 $(l-s-2)$ の両開の再帰配置.

$$(CB^{s-1}s) \cdot (A-2B)^2 \cdot N_{op-op}(l-s-2)$$

これらの和が総配置数 ($N_{cycle}(l)$) に占める比率がなだれ規模 s の出現確率である.

$$P(s) = \frac{CB^{s-1}s}{N_{cycle}(l)} \{ B^2 N_{cl-cl}(l-s-2) + 2B(A-2B) N_{op-cl}(l-s-2) + (A-2B)^2 N_{op-op}(l-s-2) \} \quad (3.20)$$

これは (3.18) 式と等しく, 極限 ($l \rightarrow \infty$) から無限系では,

$$P(s) \longrightarrow X \cdot Y^s \cdot s \quad (3.21)$$

ただし,

$$X = \frac{C}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d+4}, \quad Y = \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2 \quad (3.22)$$

である.

$d < \frac{C}{B} < (d+2)$ の場合

Cluster が III Group の Site を全く含まない場合と, 1 つでも含む場合を分けて考える.

• III Group を全く含まない場合.

Figure 3.7, 3.8 および Table 3.2, 3.3 から追加 Site の状態数はこのとき $C - (A - 2B) = 2B + C - A$ である. また Figure 3.11 および Table 3.5 から波及 Sites のそれぞれの要素は $\text{II} \cap \text{Clu.}$ で構成され状態数は $(3B - A)$ である. 追加位置は $\frac{s}{l} \cdot l = s$ 通りであるから, Cluster の場合の数は “ $(2B + C - A) \cdot (3B - A)^{s-1} \cdot s$ ” である. L, R を構成する Group は以下に場合分けされ, それぞれの領域外の部分に許される配置を考え, 場合の数を求める.

– (L, R) = (I, I) のとき,

Cluster には III Group の Site が存在しないから非再帰配置.

– (L, R) = (I, $\text{II} \cap \text{LR}$), ($\text{II} \cap \text{LR}$, I) のとき,

L, R Sites の場合の数は $B(A - 2B)$, 周りの部分は系 $(l - s - 2)$ の両閉の再帰配置.

$$\{(2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s\} \cdot 2B(A - 2B) \cdot N_{cl-cl}(l - s - 2)$$

– (L, R) = ($\text{II} \cap \text{LR}$, $\text{II} \cap \text{LR}$) のとき,

L, R Sites の場合の数は $(A - 2B)^2$, 周りの部分は系 $(l - s - 2)$ の周期の再帰配置.

$$\{(2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s\} \cdot (A - 2B)^2 \cdot N_{cycle}(l - s - 2)$$

• III Group を含む場合.

追加および波及の Sites がしきい値以上であるもの全て ($CB^{s-1}s$) から, III Group を全く含まない場合 ($(2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s$) を除いて Cluster の場合の数は “ $\{CB^{s-1}s - (2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s\}$ ” である. L, R Sites は以下に場合分けされる.

– (L, R) = (I, I) のとき,

L, R Sites の場合の数は B^2 , 周りの部分は系 $(l - s - 2)$ の両閉の再帰配置.

$$\{CB^{s-1}s - (2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s\} \cdot B^2 \cdot N_{cl-cl}(l - s - 2)$$

– (L, R) = (I, $\text{II} \cap \text{LR}$), ($\text{II} \cap \text{LR}$, I) のとき,

L, R Sites の場合の数は $B(A - 2B)$, 周りの部分は系 $(l - s - 2)$ の開閉の再帰配置.

$$\{CB^{s-1}s - (2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s\} \cdot 2B(A - 2B) \cdot N_{op-cl}(l - s - 2)$$

– (L, R) = ($\text{II} \cap \text{LR}$, $\text{II} \cap \text{LR}$) のとき,

L, R Sites の場合の数は $(A - 2B)^2$, 周りの部分は系 $(l - s - 2)$ の両開の再帰配置.

$$\{CB^{s-1}s - (2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s\} \cdot (A - 2B)^2 \cdot N_{op-op}(l - s - 2)$$

これらの和が総配置数 ($N_{cycle}(l)$) に占める比率がなだれ規模 s の出現確率である.

$$\begin{aligned} P(s) = \frac{s}{N_{cycle}(l)} & \left[(2B + C - A)(3B - A)^{s-1} \right. \\ & \times \{2B(A - 2B) N_{cl-cl}(l - s - 2) + (A - 2B)^2 N_{cycle}(l - s - 2)\} \\ & + \{CB^{s-1}s - (2B + C - A)(3B - A)^{s-1}s\} \\ & \times \{B^2 N_{cl-cl}(l - s - 2) + 2B(A - 2B) N_{op-cl}(l - s - 2) \\ & \left. + (A - 2B)^2 N_{op-op}(l - s - 2)\} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

このうち CB^{s-1} の係数は (3.18) 式と等しく, 極限 ($l \rightarrow \infty$) から無限系では,

$$P(s) \longrightarrow (X \cdot Y^s - V \cdot W^s) \cdot s \quad (3.24)$$

ただし,

$$\begin{aligned} X &= \frac{C}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d+4}, \quad Y = \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2 \\ V &= \frac{B^2(2B+C-A)\{\lambda_1 - (3B-A)\}^2}{(3B-A)\lambda_1^2(\lambda_1+B)(\lambda_1-B)} \\ &= \frac{(2B+C-A)(V_1 + V_2\sqrt{A^2-4B^2})}{2B^4(A+2B)(3B-A)} \\ &\quad \begin{cases} V_1 = -A^5 + 4A^4B + 2A^3B^2 - 20A^2B^3 + 8AB^4 + 16B^5 \\ V_2 = A^4 - 4A^3B + 12AB^3 - 6B^4 \end{cases} \\ &= \frac{(\frac{C}{B} - d)\{V'_1 + V'_2\sqrt{d(d+4)}\}}{2(d+4)(1-d)} \\ &\quad \begin{cases} V'_1 = -d^2(d+4)(d^2+2d-2) \\ V'_2 = d^4 + 4d^3 - 4d + 2 \end{cases} \\ W &= \frac{3B-A}{\lambda_1} \\ &= \frac{(3B-A)(A - \sqrt{A^2-4B^2})}{2B^2} \\ &= \frac{1-d}{2} \{d+2 - \sqrt{d(d+4)}\} \\ &= (1-d) \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

である.

3.5.3 まとめ

無限系 ($l \rightarrow \infty$) に対する規模 $s (= 1, 2, \dots)$ のなだれの出現確率をまとめる.

($0 < d < 1$) かつ ($d < \frac{C}{B} < d+2$) の場合

$$P(s) \longrightarrow (X \cdot Y^s - V \cdot W^s) \cdot s$$

($d > 0$), ($0 < \frac{C}{B} < d+2$) におけるそれ以外の場合

$$P(s) \longrightarrow X \cdot Y^s \cdot s$$

ただし X, Y, V, W は,

$$\begin{aligned} X &= \frac{C}{B} \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \\ Y &= \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$V = \frac{(\frac{C}{B} - d) \{V'_1 + V'_2 \sqrt{d(d+4)}\}}{2(d+4)(1-d)}$$

$$\begin{cases} V'_1 = -d^2(d+4)(d^2 + 2d - 2) \\ V'_2 = d^4 + 4d^3 - 4d + 2 \end{cases}$$

$$W = (1-d) \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2$$

である.

3.6 B = C の場合

本節では $B = C$ の場合を対象とし, いくつかの d に対してなだれ規模の確率分布を示す. また BTW Model ($d = 0$) との関係についてふれる.

3.6.1 $d = 0$ (BTW Model) の場合

$d = 0$ ($A = 2, B = 1$) のとき BTW Model である. 安定な Site の状態は 1 と 0 しか存在せず, 簡単になだれ規模の分布を求めることができる. ただし BTW Model は保存系 ($d = 0$) であるから, 少なくとも境界の 1ヶ所は開放されていなければならず, “両開” を対象とする.

まず再帰配置数を 3.1 節の Dhar の行列式から求める.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1^2}}{2} = 1 \\ \lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1^2}}{2} = 1 \end{cases}$$

を次式に代入して,

$$\begin{aligned} N(l) &= \frac{\lambda_1^{l+1} - \lambda_2^{l+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \lambda_1^l + \lambda_1^{l-1} \lambda_2 + \cdots + \lambda_2^l \\ &= l + 1 \end{aligned}$$

である. 全ての Sites が 1 の配置 (配置数 1) と, 1 つの Site が 0 で他が全て 1 の配置 (配置数 l) は判定 (2.3.4 小節) により再帰配置で, これらが全てである. また 2.3.3 小節からこれらは等しい確率で出現する. s 個の 1 のつながり (Cluster) に追加が行われたとき規模 s のなだれが発生するのであるが, この s の Cluster は全ての配置 ($l+1$) のうち 2 つの配置に存在する. また Cluster における追加位置は l Sites のなかから s 通り考えられる (Figure 3.12).

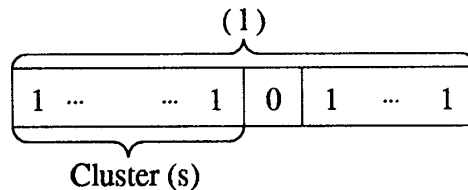


Figure 3.12: 1次元 BTW Model の Cluster

よって規模 s のなだれの出現確率は,

$$P(s) = \frac{2}{l+1} \cdot \frac{s}{l} = \frac{2s}{l(l+1)} \quad (3.25)$$

である. ただし $s = 0, l$ では,

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{l}{l+1} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{l+1} \\ P(l) &= \frac{1}{l+1} \cdot \frac{l}{l} = \frac{1}{l+1} \end{aligned}$$

である.

開閉の場合, 再帰配置には全ての Sites の状態が 1 の配置しか存在しない. なだれは全ての Sites に波及し, 系 l ではなだれの規模は常に l である.

3.6.2 なだれの分布

3.4節と 3.5節で求めたなだれの出現確率に “ $B = C$ ” を代入して以下を得る.

$d \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned} P(0) &\longrightarrow 1 - \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d(d+4)} \\ P(s) &\longrightarrow X \cdot Y^s \cdot s \quad (s = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$0 < d < 1$ の場合

$$\begin{aligned} P(0) &\longrightarrow \frac{1}{2} \left\{ d(d+1) + \frac{-d^2 - 3d + 2}{d+4} \sqrt{d(d+4)} \right\} \\ P(s) &\longrightarrow (X \cdot Y^s - V \cdot W^s) \cdot s \quad (s = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ただし X, Y, V, W は,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{d(d+4)}}{d+4} \\ Y &= \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2 \\ V &= \frac{V'_1 + V'_2 \sqrt{d(d+4)}}{2(d+4)} \\ &\quad \begin{cases} V'_1 = -d^2(d+4)(d^2 + 2d - 2) \\ V'_2 = d^4 + 4d^3 - 4d + 2 \end{cases} \\ W &= (1-d) \left(\frac{\sqrt{d+4} - \sqrt{d}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

である. これらは s の指数関数と s の積で, いくつかの値を Table 3.6 に, 分布を Figure 3.13 に示す. 曲線上の $s = 1, 2, \dots$ における値が, 無限系における各規模 s のなだれの出現確率である.

d	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
$P(0)$	0.8979	0.8232	0.7113	0.5527	0.4166	0.3002	0.2103	0.1453	0.0999	0.0688
X	0.8164	0.7071	0.5773	0.4472	0.3333	0.2425	0.1740	0.1240	0.0880	0.0623
Y	0.1010	0.1715	0.2679	0.3819	0.5000	0.6096	0.7034	0.7793	0.8381	0.8825
V	—	—	—	—	0.1875	0.1742	0.1448	0.1122	0.0834	0.0606
W	—	—	—	—	0.2500	0.4572	0.6155	0.7305	0.8119	0.8687

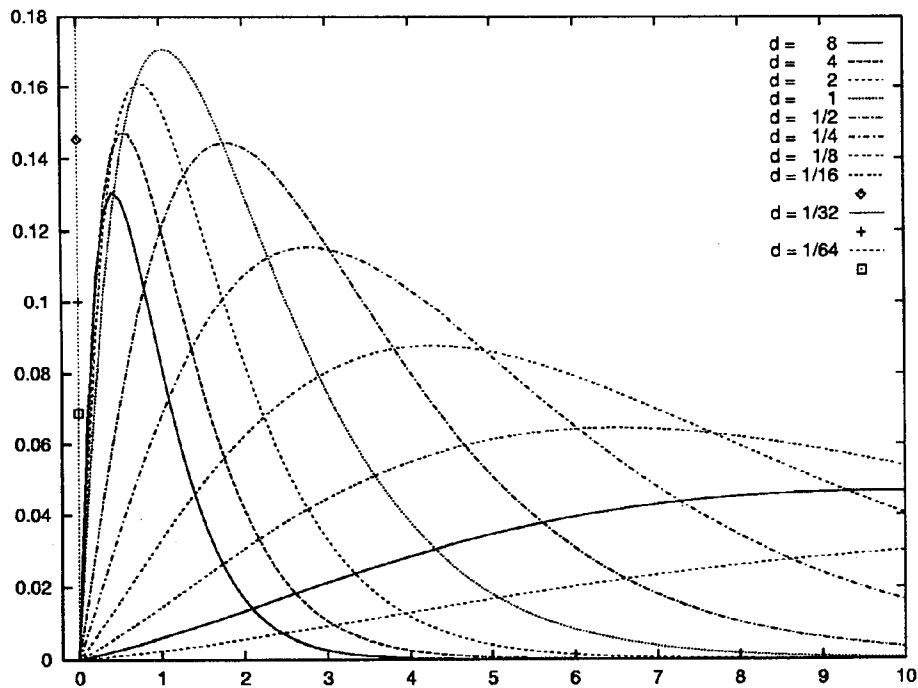
Table 3.6: いくつかの d に対する $P(0)$ および X, Y, V, W の値Figure 3.13: 無限系におけるなだれ規模の確率分布. 左から右, 上から下に $d = 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$. $s = 0$ の点は上から下に $d = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$. ($d \geq \frac{1}{8}$ では図の範囲外.)

Figure 3.13 から, 逸脱率 d が大きいときには小さい規模のなだれが頻繁に発生, 大きい規模のなだれはほとんど発生しない. d を小さくするにつれピークは規模が大きい方へとずれ, 出現確率の最大値は減少する. 保存系への極限 ($d \rightarrow 0$) として BTW Model の値 $d = 0$ を代入すると $(X, Y, V, W) = (0, 1, 0, 1)$ となり, $P(s) \rightarrow 0$ である. 一方 3.6.1 小節から, 無限系の BTW Model における有限のなだれは出現確率が 0 である.

$$P(s) \longrightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{2s}{l(l+1)} = 0$$

このことから d の極限により, なだれの分布が連続的に BTW Model に漸近する様子が理解される.

Chapter 4

Fibonacci 数列と Lucas 数列

本章では 1 次元 Model の各 Group I, II, III を配置する組み合わせの数が Fibonacci 数列や Lucas 数列 (4.1 節) によって表されることを示し, その関係を明らかにする (4.2 節). 特に $A = 3, B = 1$ ($d = 1.0$) のとき, Site の状態は 0, 1, 2 の 3 種類で各 Group の状態数は 1 個ずつであるためそれがそのまま再帰配置数である. またこのとき, そのほかいたるところに出現するこれらの数列を記す (4.3 節). 最後にそれらとパスカルの三角形との関係を示す (4.4 節).

4.1 Fibonacci 数列, Lucas 数列

Fibonacci 数列 (F 数列) と Lucas 数列 (L 数列) はともに漸化式

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (4.1)$$

をもち, それぞれ以下の初期値をとる.

$$\begin{cases} \text{Fibonacci 数列} & F_1 = 1, \quad F_2 = 1. \\ \text{Lucas 数列} & L_1 = 1, \quad L_2 = 3. \end{cases}$$

これから Table 4.1 を得る.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207	...

Table 4.1: Fibonacci 数列と Lucas 数列

Binet の公式

3.1.1 小節において Dhar の行列式から得られた漸化式 (3.1) に $A = 1, B^2 = -1$ を代入したものは F, L 数列の漸化式 (4.1) と一致する. このときと同じ解法を用いて F, L 数列の一般項 (Binet の公式) を求める.

行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値は,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

である. ここで $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比である. このとき,

$$\tau^2 = \tau + 1$$

を満たす. 固有ベクトルは,

$$\text{固有値 } \tau \text{ のとき } \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{固有値 } \left(-\frac{1}{\tau}\right) \text{ のとき } \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから, 行列の $(n-2)$ 乗は,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \tau & -\frac{1}{\tau} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^{n-2} & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\tau} \\ -1 & \tau \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \tau^{n-1} - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{n-1} & \tau^{n-2} - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{n-2} \\ \tau^{n-2} - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{n-2} & \tau^{n-3} - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{n-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である. F 数列の場合, 初期値は

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で, 一般項は

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tau^{n-2}(\tau+1) - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{n-2} \left(-\frac{1}{\tau}+1\right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tau^n - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^n \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

である. L 数列の場合, 初期値は

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で, 一般項は

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tau^{n-2}(3\tau+1) - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{n-2} \left(-\frac{3}{\tau}+1\right) \right\} \\ &= \tau^n + \left(-\frac{1}{\tau}\right)^n \end{aligned} \quad (4.3)$$

である. ここで 2 行目は, $3\tau+1 = \sqrt{5}\tau^2$, $-\frac{3}{\tau}+1 = -\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\tau}\right)^2$ であることから.

F 数列と L 数列の関係の公式

F 数列と L 数列は以下の関係をもつ.

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n \quad (4.4)$$

このことを数学的帰納法により証明する.

1. • $n = 2$ のとき,

$$F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3 = L_2$$

- $n = 3$ のとき,

$$F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4 = L_3$$

で成り立つ.

2. $n = k$, および $n = k+1$ で成り立つとすると,

$$F_{k-1} + F_{k+1} = L_k$$

$$F_k + F_{k+2} = L_{k+1}$$

これらの辺々を加えると,

$$(\text{左辺}) = (F_{k-1} + F_k) + (F_{k+1} + F_{k+2}) = F_{k+1} + F_{k+3}$$

$$(\text{右辺}) = L_k + L_{k+1} = L_{k+2}$$

よって $n = k+2$ のときにも成り立つ.

これらから, (4.4) 式は証明された. 他にも F 数列や L 数列はたくさんの公式をもち, 様々な応用に現れる. 詳しくは [20] や [21]などを参照.

4.2 I, II, III 配置

1次元 Model における再帰配置は各 Group が 3.2.1小節の規則 “I と I の間には III の Site が存在, II の配置は Random である.” により配置されたものである. 本節ではこの規則に従うように I, II, III を配置する組み合わせの数を求め, それが F 数列や L 数列であることを示す. (ここで考えているのは Group を配置する数であり, 前章で扱った Site の全ての状態による再帰配置数ではないことに注意.)

4.2.1 両開の場合

3.2.3小節の II の規則から, 全ての I と III だけからなる配置 (I, III 配置) のあらゆる Sites 間に II を挿入すれば, 配置はつくされる. そこでまず系 m における I, III 配置を数えるが, これは I が連続してはならないという条件のもとでの I と III の並べ方の問題に帰着する. 次にこの I, III 配置に対する II の挿入の組み合わせを数えて, I, II, III 配置の数を求める.

I, III 配置

3.2.4小節の開放境界に対する配置規則から, 端 Site は I と III の両方が許される. 系 m の I, III 配置は右端の Site m が I の場合と III の場合に分類される (Figure 4.1).

- Site m が I のとき, I は連続しないから Site $(m-1)$ は III, すると III の性質から, Site 1 ~ Site $(m-2)$ の部分は系 $(m-2)$ の (両開の) I, III 配置である (Figure 4.1の左側).
- Site m が III のとき, やはり III の性質から, Site 1 ~ Site $(m-1)$ の部分は系 $(m-1)$ の (両開の) I, III 配置である (Figure 4.1の右側).

これらの和が系 m の I, III 配置の数である.

$$[\text{系 } m \text{ の配置数}] = [\text{系 } (m-1) \text{ の配置数}] + [\text{系 } (m-2) \text{ の配置数}]$$

これは F, L 数列の漸化式 (4.1) に一致し, 初期値が系 1, 系 2 のとき, $2 (= F_3)$, $3 (= F_4)$ であるから系 m 両開の I, III 配置の数は F_{m+2} である.

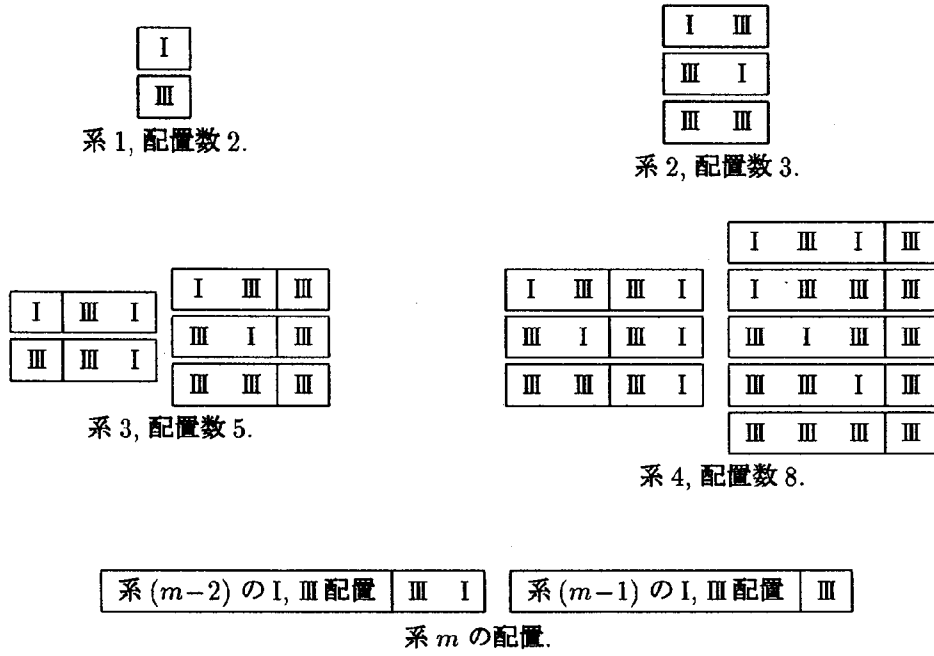


Figure 4.1: 系 1 ~ 4, および 系 m の I, III 配置

II の挿入

系 l 両開の II を含む一般の配置において, 含まれる II の Sites の数が i 個 ($0 \leq i \leq l, i = l-m$) であるとする. そのとき I, III 配置の数は F_{l-i+2} , 各 I, III 配置に対してあらゆる Site への II の挿入の組み合わせは ${}_lC_i$ 通りであるから, 配置数は ${}_lC_i \cdot F_{l-i+2}$ となる. 全ての i の和をとると, それが I, II, III 配置の数である.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^l {}_lC_i F_{l-i+2} &= \sum_{m=0}^l {}_lC_{l-m} F_{m+2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{m=0}^l {}_lC_m \tau^{m+2} - \sum_{m=0}^l {}_lC_m \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{m+2} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tau^2 (1+\tau)^l - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^2 \left(1-\frac{1}{\tau}\right)^l \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tau^{2l+2} - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{2l+2} \right\} \\
 &= F_{2l+2}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

以上は, $i = l-m$ として m の範囲は $0 \leq m \leq l$ (1 行目). $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{ \tau^n - (-\frac{1}{\tau})^n \}$ を代入し展開, また ${}_lC_{l-m} = {}_lC_m$ である (2 行目). 二項定理 ($(1+a)^n = \sum_{i=0}^n {}_nC_i a^i$) を用いた (3 行目). $1+\tau = \tau^2$ から $1-\frac{1}{\tau} = (-\frac{1}{\tau})^2$ で, これらを代入 (4 行目). 再び $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{ \tau^n - (-\frac{1}{\tau})^n \}$ によりまとめた (5 行目).

4.2.2 開閉の場合

以降その他の境界の場合も両開と同様に計算を行う.

I, III 配置

3.2.2の閉鎖境界に対する配置規則から閉鎖境界の端 Site は III に固定. 内側部分は系 $(m-1)$ の両開の I, III 配置と等しい (Figure 4.2). よって系 m 両開の I, III 配置の数は F_{m+1} となる.

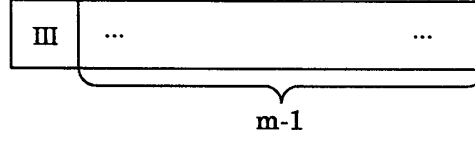


Figure 4.2: 両開の I, III 配置

II の挿入

両開の場合 I, III 配置の数は F_{l-i+1} で同様の計算により以下を得る.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^l {}_l C_i F_{l-i+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{m=0}^l {}_l C_m \tau^{m+1} - \sum_{m=0}^l {}_l C_m \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{m+1} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tau^{2l+1} - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{2l+1} \right\} \\
 &= F_{2l+1}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2.3 両閉の場合

I, III 配置

両開の閉鎖境界と同様, 両閉では両端 Sites は III に固定. 内側部分は系 $(m-2)$ の両開の I, III 配置と等しい (Figure 4.3). よって系 m 両閉の I, III 配置の数は F_m となる.

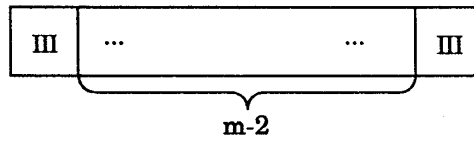


Figure 4.3: 両閉の I, III 配置

II の挿入

両閉の場合 I, III 配置の数は F_{l-i} . 全て II の配置が許されないから $0 \leq i \leq l-1$ で,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{l-1} {}_l C_i F_{l-i} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{m=1}^l {}_l C_m \tau^m - \sum_{m=1}^l {}_l C_m \left(-\frac{1}{\tau}\right)^m \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{m=0}^l {}_l C_m \tau^m - \sum_{m=0}^l {}_l C_m \left(-\frac{1}{\tau}\right)^m \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tau^{2l} - \left(-\frac{1}{\tau} \right)^{2l} \right\} \\
 &= F_{2l}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる. ただし 1 行目の m の範囲が $1 \leq m \leq l$ であるのを $0 \leq m \leq l$ とするが, このとき ${}_lC_0\tau^0 - {}_lC_0(-\frac{1}{\tau})^0 = 0$ である.

4.2.4 周期の場合

I, III 配置

Site m に着目し, I の場合と III の場合のそれぞれについて考える (Figure 4.4). I, III の性質から以下のようになる.

- Site m が I のとき, Site $1 \sim \text{Site } (m-1)$ の部分は系 $(m-1)$ の両開の I, III 配置と等しく, 配置数は F_{m-1} である.
- Site m が III のとき, Site $1 \sim \text{Site } (m-1)$ の部分は系 $(m-1)$ の両開の I, III 配置と等しく, 配置数は F_{m+1} である.

これらの和 $F_{m-1} + F_{m+1} = \underline{L_m}$ (4.1節) が系 m 周期の I, III 配置の数である.

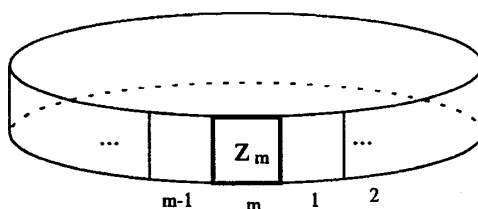


Figure 4.4: 周期の I, III 配置, Site m は I または III.

II の挿入

周期の場合 I, III 配置の数は L_{l-i} で,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{l-1} {}_lC_i L_{l-i} &= \sum_{m=1}^l {}_lC_{l-m} L_m \\
 &= \sum_{m=1}^l {}_lC_m \tau^m + \sum_{m=1}^l {}_lC_m \left(-\frac{1}{\tau} \right)^m \\
 &= \sum_{m=0}^l {}_lC_m \tau^m + \sum_{m=0}^l {}_lC_m \left(-\frac{1}{\tau} \right)^m - 2 \\
 &= \tau^{2l} + \left(-\frac{1}{\tau} \right)^{2l} - 2 \\
 &= L_{2l} - 2
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる. 以上は両開などと同様であるが, $L_n = \tau^n + (-\frac{1}{\tau})^n$ を代入 (2 行目). m の範囲が $1 \leq m \leq l$ であるのを, $0 \leq m \leq l$ として ${}_lC_0\tau^0 + {}_lC_0(-\frac{1}{\tau})^0 = 2$ を引いた (3 行目).

4.2.5 まとめ

系 m の各境界条件に対して I, III 配置の数は Table 4.2 となる.

境界条件	I, III 配置の数
両開	F_{m+2}
開閉	F_{m+1}
両閉	F_m
周期	L_m

Table 4.2: 系 m の I, III 配置の数

I, II, III 配置の数は Table 4.3 となる. 両開, 開閉, 両閉では F 数列 (F_{2l+2} , F_{2l+1} , F_{2l}), 周期で L 数列 ($L_{2l}-2$) である.

系	両開	開閉	両閉	周期
1	3	2	1	1
2	8	5	3	5
3	21	13	8	16
4	55	34	21	45
5	144	89	55	121
6	377	233	144	320
7	987	610	377	841
8	2584	1597	987	2205
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
l	F_{2l+2}	F_{2l+1}	F_{2l}	$L_{2l}-2$

Table 4.3: I, II, III 配置の数

4.3 $A = 3, B = 1$ ($d = 1.0$)

$A = 3, B = 1$ ($d = 1.0$) のとき, Site の状態は 0, 1, 2 の 3 種類で各 Group は状態を 1 個ずつもつ (Figure 4.5).

0	1	2
I	II	III

Figure 4.5: $A = 3, B = 1$ ($d = 1.0$) における I, II, III Group.

このとき Table 4.3 はそのまま再帰配置数で, 以下これらが 3.1 節における Dhar の行列を用いた方法によるものと一致することを示す. またこの $A = 3, B = 1$ のときにはいたるところに F, L 数列が出現するのであるが, その例を記載する.

4.3.1 F, L 数列で表される再帰配置数

両開の場合

Dhar の行列式から得られた漸化式 (3.1) に $A = 3, B = 1$ を代入し,

$$N_{op \cdot op}(l) = 3N_{op \cdot op}(l-1) - N_{op \cdot op}(l-2) \quad (4.9)$$

という関係を得るが, 一方で F 数列の偶数項は以下のような関係をもつ.

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} \\ &= 2F_{2n-2} + F_{2n-3} \\ &= 3F_{2n-2} - F_{2n-4} \\ &= 3F_{2(n-1)} - F_{2(n-2)} \end{aligned}$$

これは (4.9) 式と同じ漸化式である. 初期値が,

$$\begin{aligned} N_{op \cdot op}(1) &= |3| = 3 = F_4 \\ N_{op \cdot op}(2) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 = F_6 \end{aligned}$$

であるから,

$$N_{op \cdot op}(l) = F_{2l+2}$$

となり, Table 4.3 と一致する.

その他の境界の場合

開閉の場合, (3.6) 式に $B = 1$ と, 上で求めた $N_{op \cdot op}(l) = N(l) = F_{2l+2}$ を代入して以下を得る.

$$\begin{aligned} N_{op \cdot cl}(l) &= N(l) - N(l-1) \\ &= F_{2l+2} - F_{2l} \\ &= F_{2l+1} \end{aligned}$$

両閉の場合, 同様に (3.7) 式から以下を得る.

$$\begin{aligned} N_{cl \cdot cl}(l) &= N(l-1) \\ &= F_{2l} \end{aligned}$$

周期の場合, (3.8) 式から以下を得る.

$$\begin{aligned} N_{cycle}(l) &= 2N(l) - 3N(l-1) - 2 \\ &= 2F_{2l+2} - 3F_{2l} - 2 \\ &= 2F_{2l+1} - F_{2l} - 2 \\ &= F_{2l+1} + F_{2l-1} - 2 \\ &= L_{2l} - 2 \end{aligned}$$

これらも Table 4.3 と一致する.

4.3.2 そのほかの F, L 数列

Table 4.4 は周期境界において各数 $(2, 1, 0)$ の出現する割合と、連続数 $(22, 21, 12, 20, 02, 11, 10, 01, 00)$ の出現する割合を記してある。

系	各数の割合			連続数の割合									
	2	1	0	22	21	12	20	02	11	10	01	00	
1	1	0	0										
2	3	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	
3	8	5	3	3	3	3	2	2	1	1	1	0	
4	21	16	8	8	8	8	5	5	5	3	3	0	
5	55	45	21	21	21	21	13	13	16	8	8	0	
6	144	121	55	55	55	55	34	34	45	21	21	0	
7	377	320	144	144	144	144	89	89	121	55	55	0	
8	987	841	377	377	377	377	233	233	320	144	144	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
l	F_{2l}	$L_{2l-2}-2$	F_{2l-2}	F_{2l-2}			F_{2l-3}		$L_{2l-4}-2$	F_{2l-4}		0	

Table 4.4: $A = 3, B = C = 1$ ($d = 1.0$), 周期における各数の割合と連続数の割合

この他にも 3 以上の連続数の出現割合も F, L 数列で表される。また Table 4.5 は同じく周期におけるなだれ規模の割合を記してある。

系	総配置数	なだれ規模の割合											
l	$\det \Delta_l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	l	
1	1	0	1										
2	5	2	1	2									
3	16	8	3	2	3								
4	45	24	8	6	3	4							
5	121	66	21	16	9	4	5						
6	320	176	55	42	24	12	5	6					
7	841	464	144	110	63	32	15	6	7				
8	2205	1218	377	288	165	84	40	18	7	8			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
l	$L_{2l} - 2$	$F_{2l-2} + L_{2l-2} - 2$	F_{2l-2}	$2F_{2l-4}$...	nF_{2l-2n}	...	$l-1$	l				

Table 4.5: $A = 3, B = C = 1$ ($d = 1.0$), 周期におけるなだれ規模の割合

一方、無限系でのなだれ規模の分布関数は、

$$P(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \tau^{-2s} \cdot s$$

である。このように $A = 3, B = 1$ ($d = 1.0$) ではいたるところに Fibonacci 数列や Lucas 数列、黄金比 τ がみられ興味深い。

4.4 パスカルの三角形における Fibonacci 数列

4.4.1 I, III 配置から得られる関係

4.2節で各 Group の配置数が F 数列や L 数列で表されることを示したが、本節ではそれらを組み合わせの数 (2 項係数) を用いて表すことにより、パスカルの三角形にみられる F 数列について記述する。

両開の I, III 配置

系 m 両開の I, III 配置において I の数が n 個であるとする、 m が偶数のとき $0 \leq n \leq \frac{m}{2}$, 奇数のとき $0 \leq n \leq \frac{m+1}{2}$ である。これらをガウス記号を用いてまとめると、

$$\begin{cases} \text{I の数} & n \text{ 個} & (0 \leq n \leq [\frac{m+1}{2}]) \\ \text{III の数} & m-n \text{ 個} \end{cases}$$

となる。I が連続しない場合の数は、 $(m-n+1)$ 個の III の間と外側に n 個の I を挿入する組み合わせの数 ${}_{m-n+1}C_n$ である (Figure 4.6)。

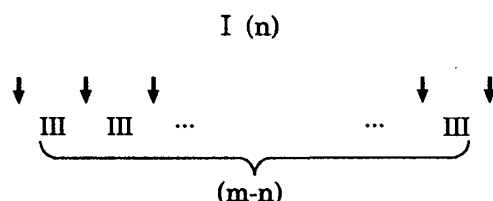


Figure 4.6: III の間と外側への I の挿入. 括弧内はその数.

これの全ての n の和をとったものは I, III 配置の数である。4.2節で求めた F 数列による F_{m+2} も I, III 配置の数であり、これらは同値である。

$$(\text{系 } m \text{ 両開の I, III 配置の数}) = \sum_{n=0}^{[\frac{m+1}{2}]} {}_{m-n+1}C_n = F_{m+2} \quad (4.10)$$

開閉の I, III 配置

同様に、開閉では一方の端の外側には挿入されない。このとき F 数列による F_{m+1} と等しい。

$$(\text{系 } m \text{ 開閉の I, III 配置の数}) = \sum_{n=0}^{[\frac{m}{2}]} {}_{m-n}C_n = F_{m+1} \quad (4.11)$$

両閉の I, III 配置

両閉では両方とも端の外側には挿入されない。このとき F 数列による F_m と等しい。

$$(\text{系 } m \text{ 両閉の I, III 配置の数}) = \sum_{n=0}^{[\frac{m-1}{2}]} {}_{m-n-1}C_n = F_m \quad (4.12)$$

パスカルの三角形

これらは等しく, 組み合わせの数と Fibonacci 数列の関係は $m (\geq 0)$ において,

$$\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} m-n C_n = F_{m+1} \quad (4.13)$$

である. 一方, パスカルの三角形は組み合わせの数 (2 項係数) を成分にもつことから, (4.13) 式の関係により斜めの和が Fibonacci 数列となる (Table 4.6).

$x \setminus y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	$\boxed{1}^6$						
4	1	4	$\boxed{6}^6$	4	1					
5	1	$\boxed{5}^6$	10	10	5	1				
6	$\boxed{1}^6$	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Table 4.6: パスカルの三角形, 各成分は ${}_x C_y$. I, III 配置から得られる F 数列との関係.

$m = 6$ を例にとると, Table 4.6 において箱で囲まれたものを (斜めに) 足し合わせると, $F_{6+1} = F_7$ になる.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 {}_{6-n} C_n &= {}_6 C_0 + {}_5 C_1 + {}_4 C_2 + {}_3 C_3 \\ &= 1 + 5 + 6 + 1 \\ &= 13 = F_7 \end{aligned}$$

4.4.2 I, II, III 配置から得られる関係

開閉の配置

開閉の I, II, III 配置の数を求めた (4.6) 式に, $i = l-m$ として前小節の (4.11) 式を代入, F_{m+1} を消去する.

$$\begin{aligned} F_{2l+1} &= \sum_{i=0}^l {}_l C_i F_{l-i+1} \\ &= \sum_{m=0}^l {}_l C_m F_{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^l \left({}_l C_m \cdot \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} m-n C_n \right) \\ &= \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} ({}_l C_m \cdot m-n C_n) \end{aligned} \quad (4.14)$$

この式から, パスカルの三角形のある行の各成分とそれに対応する斜めの部分を掛け合わせそれらの和をとると F 数列となる (Table 4.7).

$x \setminus y$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\boxed{1}_0^0$							
1	$\boxed{1}_1^1$	$\boxed{1}_1^2$						
2	$\boxed{1}_2^2$	$\boxed{2}_2^3$	$\boxed{1}_2^4$					
3	$\boxed{1}_3^3$	$\boxed{3}_3^4$	3	1				
4	$\boxed{1}_4^4$	$\boxed{4}_4^1$	$\boxed{6}_4^2$	$\boxed{4}_4^3$	$\boxed{1}_4^4$			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Table 4.7: I, II, III 配置から得られる F 数列との関係.

Table 4.7 において $l = 4$ を例にとる. 4 行目の添字の数と斜めの部分の肩の数が一致するものの積をとり, それらの和をとると $F_{2 \cdot 4+1} = F_9$ になる.

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^4 \left({}_4C_m \cdot \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} m-n C_n \right) &= {}_4C_0 \cdot {}_0C_0 + {}_4C_1 \cdot {}_1C_0 + {}_4C_2(2{}_0C_0 + {}_1C_1) \\
 &\quad + {}_4C_3(3{}_0C_0 + 2{}_1C_1) + {}_4C_4(4{}_0C_0 + 3{}_1C_1 + 2{}_2C_2) \\
 &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6(1+1) + 4(1+2) + 1(1+3+1) \\
 &= 1 + 4 + 12 + 12 + 5 = 34 = F_9
 \end{aligned}$$

両開と両閉の配置

同様に両開の (4.5) 式に (4.10) 式を代入して F_{m+2} を消去する.

$$\begin{aligned}
 F_{2l+2} &= \sum_{m=0}^l \left({}_lC_m \cdot \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} m-n+1 C_n \right) \\
 &= \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} ({}_lC_m \cdot m-n+1 C_n)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

両閉の (4.7) 式に (4.12) 式を代入して F_m を消去する.

$$\begin{aligned}
 F_{2l} &= \sum_{m=1}^l \left({}_lC_m \cdot \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} m-n-1 C_n \right) \\
 &= \sum_{m=1}^l \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} ({}_lC_m \cdot m-n-1 C_n)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

これらは上の開閉から得られた (4.14) 式の斜め部分を, 両開の (4.15) 式では下に, 両閉の (4.16) 式では上にずらして積をとったものが, やはり F 数列 (F_{2l+2} , F_{2l}) となることを意味する. ただし開閉, 両開の m の範囲が $0 \leq m \leq l$ であったのに対して, 両閉では $1 \leq m \leq l$ であることに注意.

Chapter 5

Conclusions

われわれは非保存 Sandpile Model のなだれ規模の分布を, 1 次元に対して厳密に求めた. その分布から, 非保存系から保存系への極限をとることにより, 連続的に BTW Model に一致していく様子が理解された. 本論文における 1 次元の Model では保存系の場合でも SOC は現れない. しかしながら SOC が出現する 2 次元以上の Model でも, 1 次元と同様に非保存系の極限は連続的に保存系に漸近していくことが推測される. 2 次元以上の BTW Model を非保存系の極限と位置付けることは, SOC をより普遍的な立場から捉えることになり, 2 次元以上の非保存 Model に対する理論的取り組みが今後の課題である.

また, われわれは 1 次元 Model における Fibonacci 数列や Lucas 数列を示した. 特に逸脱率 d が 1 のとき, これらの数列はいたるところに現れ興味深い. このような側面をもつことは, この Model の数学的魅力である.

Acknowledgments

有意義な助言と熱心な御指導を頂いた 小川 泰 教授に心から感謝しております. 小川研究室では全員が学問に対してひたむきな情熱を持っています. 私の研究が強い影響を受けたのは言うまでもありません. 研究室の皆様に感謝します.

Appendix A

Computer Simulation

Monte Carlo 法による Computer Simulation の解析により, 2 次元以上に対してもなだれ規模の分布などを近似的に求めることができる. ここでは 2 次元 Model における Simulation の方法と結果を紹介する.

A.1 初期配置

われわれは Computer Simulation の初期配置の設定を以下のように行った. まず各 Site の状態をとり得る値 ($0 \sim A - 1$) のなかから Random に選び, その配置から試行を開始, 経験的に $\frac{A}{C}$ Monte Carlo Step (MCS) 後の配置を初期配置とし, それ以降からデータを採取した. 1 MCS は (系の Sites 数) Step である. Figure A.1 は系 128×128 ($1\text{MCS} = 16384$ Step), $A = 5$, $B = C = 1$ における初期配置から 5 MCS ($= 81920$ Step) までの各配置での状態 $0 \sim 4$ の割合をプロットした. 5 MCS 後には初期配置の特異性が減少している.

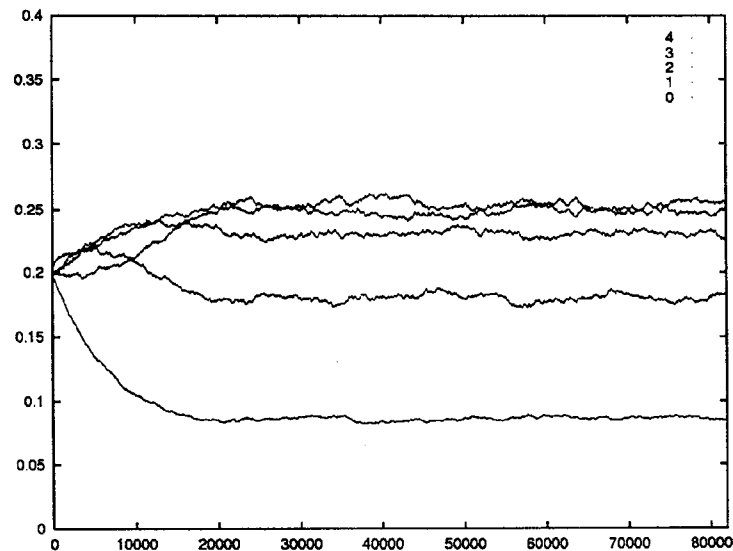


Figure A.1: 系 128×128 , $A = 5$, $B = C = 1$ における 5 MCS までの各状態の割合. 上から順に状態 4, 3, 2, 1, 0.

A.2 出現配置

Figure A.2 は系 64×64 , $d = 1$ ($A = 5$, $B = C = 1$) において 64 Step の間に発生した全てのなだれである。(左上から右下へ横方向にそれぞれ, 2, 6, 12, 17, 18, 22, 23, 30, 35, 39, 40, 41, 42, 50, 53, 57, 61, 62, 64 Step 目のなだれ.) このとき $d > 0$ ではなだれに平均的な大きさが存在し, 各規模のなだれの出現確率は指数分布である (A.4節).

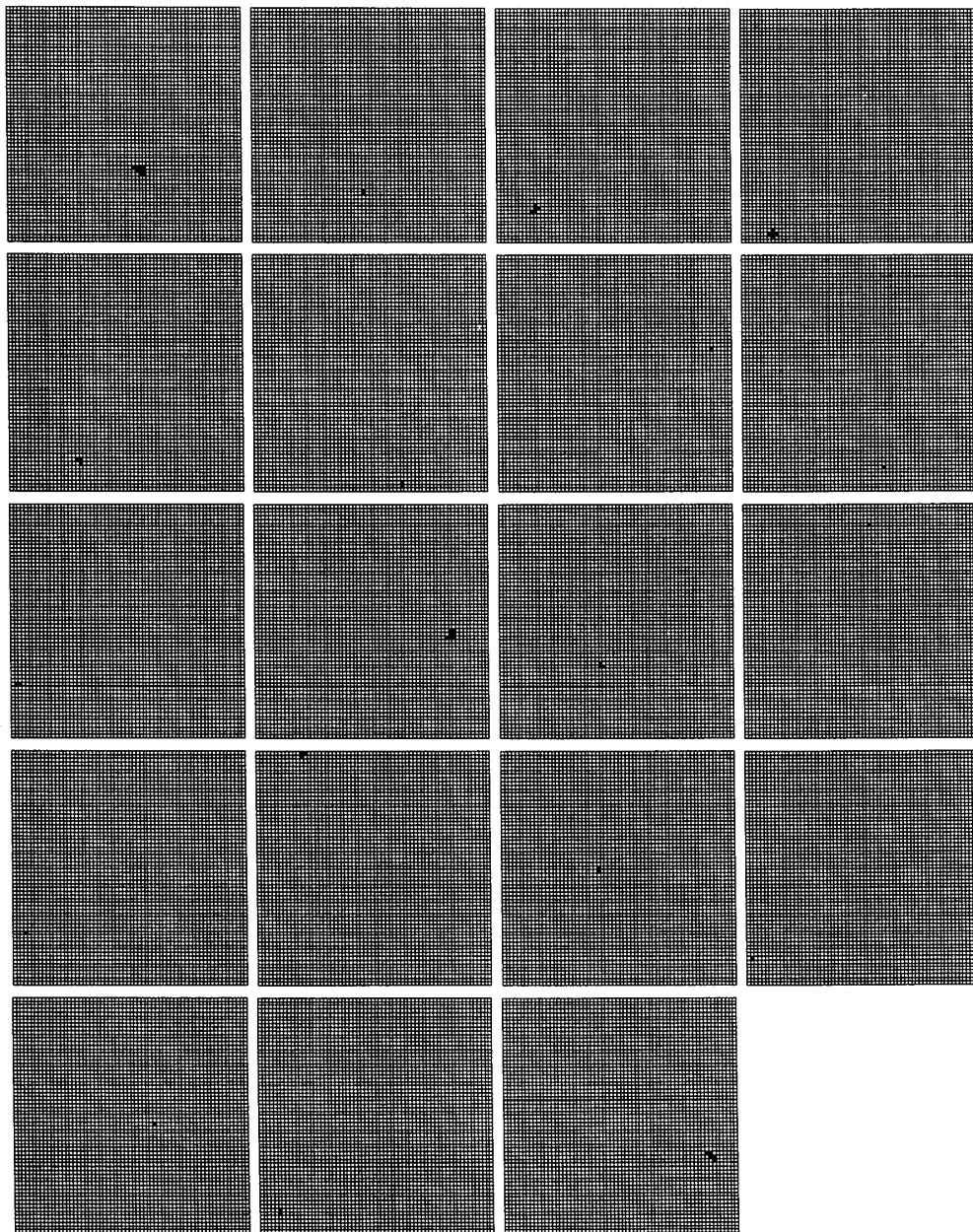


Figure A.2: 系 64×64 , $d = 1$ ($A = 5$, $B = C = 1$) において 64 Step の間に発生したなだれ

それに対して Figure A.3 は同じく系 64×64 , $d = 0$ ($A = 4$, $B = C = 1$) において 64 Step の間に発生した全てのなだれである。(左上から右下へ横方向にそれぞれ, 1, 2, 10, 18, 20, 21, 25, 32, 33, 34, 36, 43, 44, 45, 49, 51, 52, 57, 58, 60 Step 目のなだれ。) $d = 0$ では, 大小様々ななだれが発生しており, 系の大きさによる制限を考えなければ平均的ななだれの大きさが決められない。このとき各規模のなだれの出現確率はべき乗分布である (A.5節)。

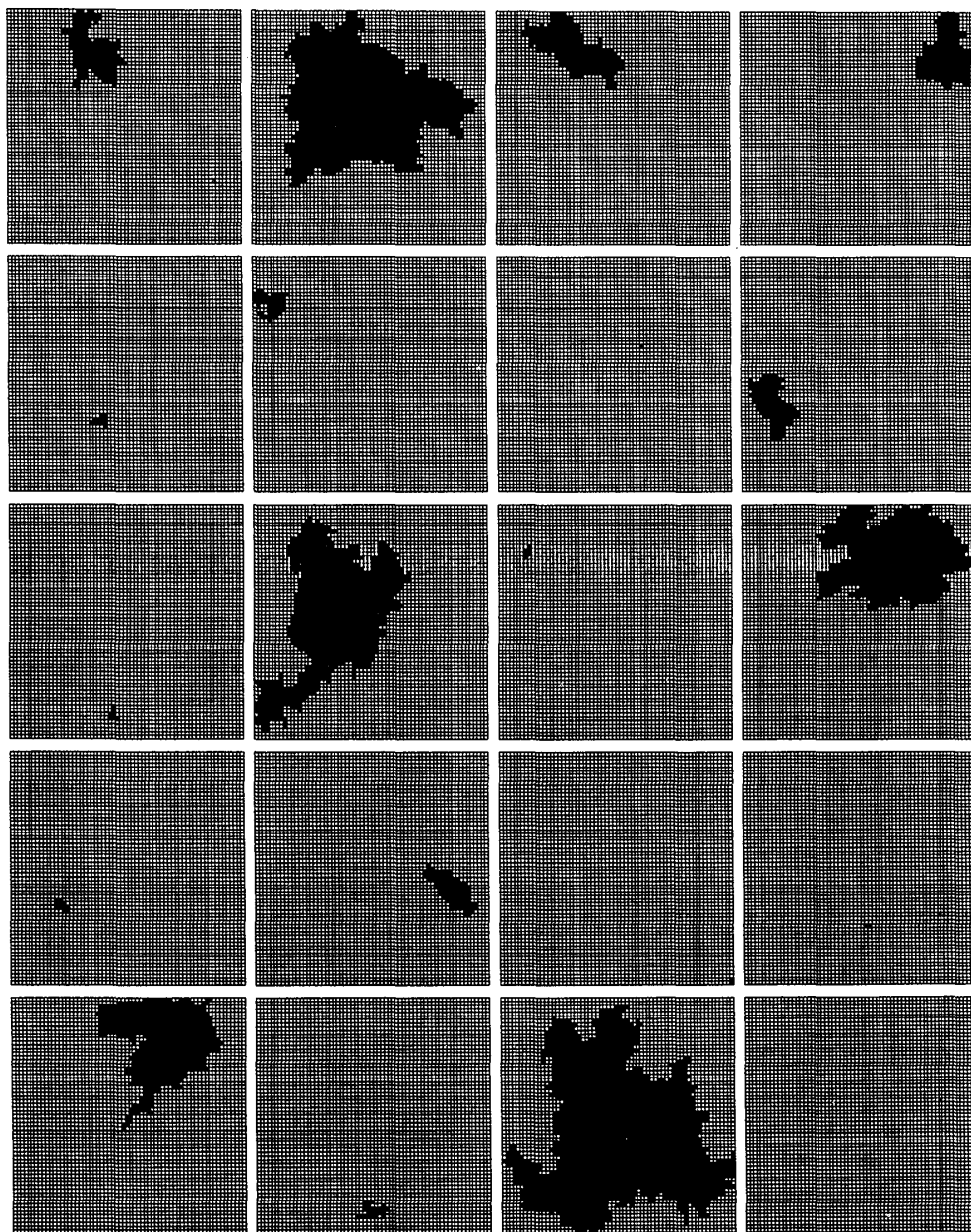


Figure A.3: 系 64×64 , $d = 0$ ($A = 4$, $B = C = 1$) において 64 Step の間に発生したなだれ。

A.3 最小二乗近似

本節では実験データから直線を決定するための最小二乗近似について記述する [19].

A.3.1 一般の場合

方程式系 $Ax = b$ の解を求める.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

b が A の列空間上にあるとき解が存在するが, 一般に応用では誤差などのためにそうならない. 誤差を

$$\begin{aligned} E^2 &= \|Ax - b\|^2 \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1)^2 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m)^2 \end{aligned}$$

とし, これが最小である解 \bar{x} を選ぶ. Figure A.4 において, 誤差ベクトル $A\bar{x} - b$ が列空間 Ax に直角であるとき E^2 は最小である.

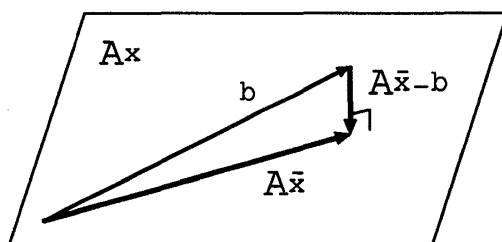


Figure A.4: 最小二乗近似

このとき,

$$\begin{aligned} (Ax)^T (A\bar{x} - b) &= 0 \\ x^T (A^T A\bar{x} - A^T b) &= 0 \end{aligned}$$

よって,

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (\text{A.1})$$

である.

A.3.2 直線の決定

いま直線 $y = \alpha + \beta \cdot t$ 上にあるべき複数の実験データ (t_i, y_i) があるとする. しかしながら各データの方程式系,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \cdot t_1 &= y_1 \\ \alpha + \beta \cdot t_2 &= y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha + \beta \cdot t_m = y_m \end{array}$$

は誤差などの影響によりたいていの場合解を持たない。これを前小節の $Ax = b$ に対応させると、

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

となり、これらを (A.1) 式に代入する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix} &= \left[\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m t_i y_i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{m \sum_{i=1}^m t_i^2 - (\sum_{i=1}^m t_i)^2} \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^m t_i^2)(\sum_{i=1}^m y_i) - (\sum_{i=1}^m t_i)(\sum_{i=1}^m (t_i y_i)) \\ m \sum_{i=1}^m (t_i y_i) - (\sum_{i=1}^m t_i)(\sum_{i=1}^m y_i) \end{bmatrix} \quad (A.2) \end{aligned}$$

これらが最小二乗近似による直線の傾き ($\bar{\beta}$) と切片 ($\bar{\alpha}$) である。

A.4 指数分布

各なだれ規模に対する出現確率のデータを片対数グラフにプロットすると $d \neq 0$ では直線状になる。このときなだれは指数分布である。Figure A.5 は系 128×128 のいくつかの d に対して、1000 MCS の試行から得られたデータをプロットした。

Figure A.6 において $d = 1$ の直線を最小二乗近似により決定した。ただし規模 s_i 出現確率 P_i の関係は片対数グラフにおける直線であり、実際には指数関数である。

$$P = \exp(\alpha + \beta \cdot s) \quad (A.3)$$

$$\log P = \alpha + \beta \cdot s \quad (A.4)$$

よって各データの $(s_i, \log P_i)$ に対して最小二乗近似を用いた。

Manna 達はこの分布関数が、

$$P(s) \sim \exp(-\beta(d) \cdot s)$$

$$\beta(d) \sim \left(\frac{d}{4}\right)^\psi$$

$$\psi \sim 0.98 \pm 0.05$$

であることを示した [18]。

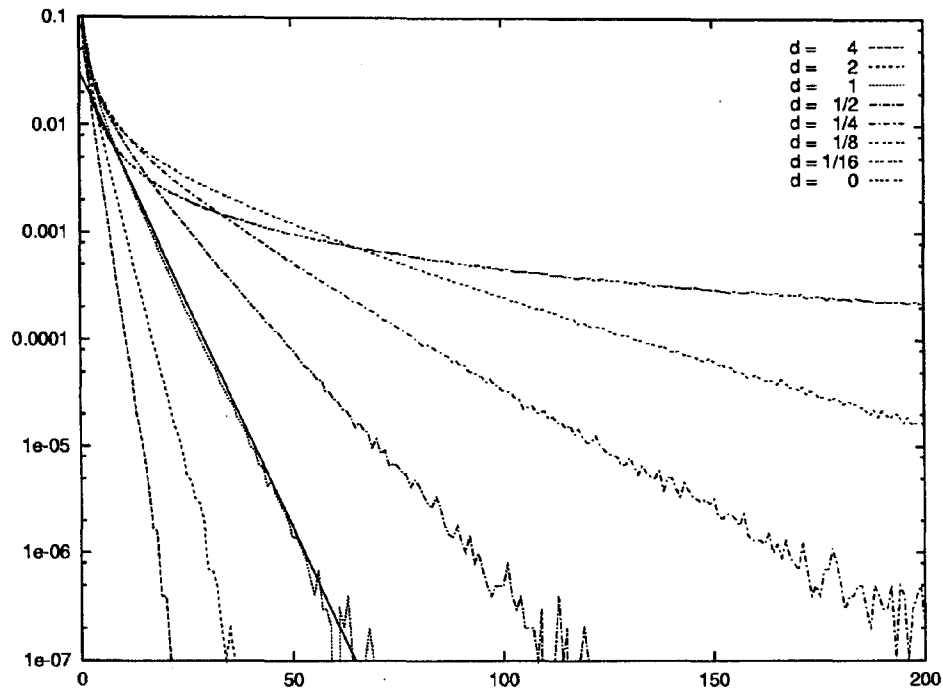


Figure A.5: 片対数グラフにおける系 128×128 , 1000 MCS から得られた各 d のなだれの分布. 左から右に $d = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, 0$.

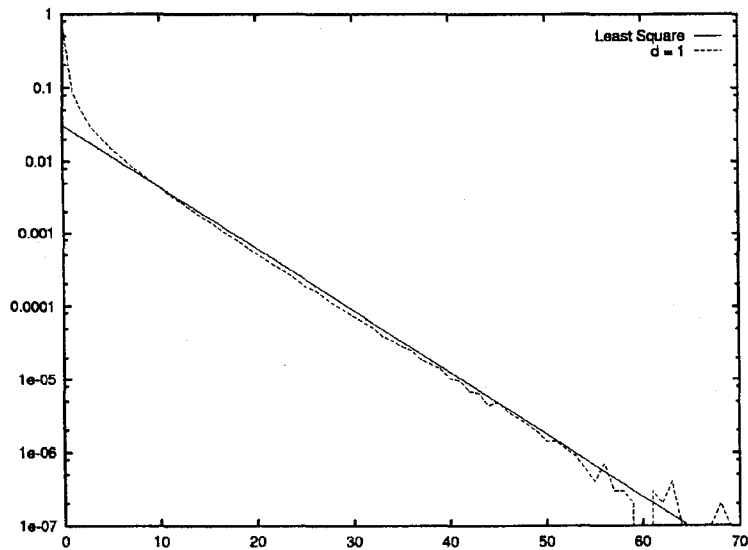


Figure A.6: 最小二乗近似による指数分布のフィッティング.

A.5 べき乗分布

両対数グラフにおけるなだれの分布は $d = 0$ のとき直線状になる. Figure A.7 は Figure A.5 と同じデータを両対数グラフにプロットしたものである. ただし $d = 0$ のときでもなだれ規模が大きい裾の部分では折れ曲がっているが, これは系が有限であることによる.

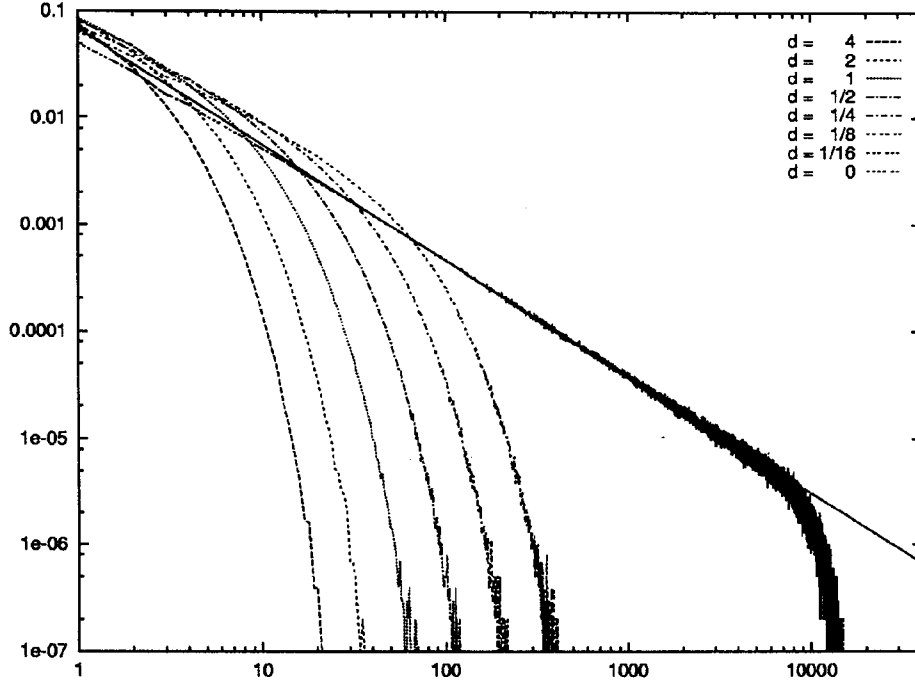


Figure A.7: 両対数グラフにおける系 128×128 , 1000 MCS から得られた各 d のなだれ規模の分布. 左から右に $d = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, 0$.

この直線は両対数グラフにおける直線であるから, 実際にはべき乗関数である.

$$P = e^{\alpha} \cdot s^{\beta} \quad (\text{A.5})$$

$$\log P = \alpha + \beta \cdot \log s \quad (\text{A.6})$$

やはりこの直線を近似的に決定したいがそのまま最小二乗近似を行うと, 横軸が対数であるから, 境界の影響を受けた裾の部分に大きく依存してしまう. 実際にべき乗分布に従うのはなだれ規模の小さいところだけで, このデータに統計処理を行う.

なだれ規模が 1, 2-3, 4~7, 8~15, 16~32, ... という集まり (ビン) ごとに加え合わせる. このビンの横軸の値としては両端 (l, r) の対数での平均が

$$\frac{\log l + \log r}{2} = \log \sqrt{l \cdot r}$$

であることから相乗平均 $\sqrt{l \cdot r}$ を採用する. この新たなデータ (s', P') は, ビンの右端の値が左端の値の約 2 倍であるから, もとのデータ (s, P) の s が大きい部分では近似的に,

$$\begin{aligned} P' &\simeq \int_s^{2s} P ds \\ s' &\simeq \sqrt{2} \cdot s \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
 P' &\simeq \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}s'}^{\sqrt{2}s'} e^{\alpha} s^{\beta} ds \\
 &= \frac{e^{\alpha}}{\beta+1} \left[s^{\beta+1} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}s'}^{\sqrt{2}s'} \\
 &= \frac{e^{\alpha} \{ 2^{\frac{\beta+1}{2}} - 2^{-\frac{\beta+1}{2}} \}}{\beta+1} \cdot s'^{\beta+1}
 \end{aligned}$$

である. やはりべき乗関数になっており, Figure A.8 は処理後データの両対数グラフへのプロットである.

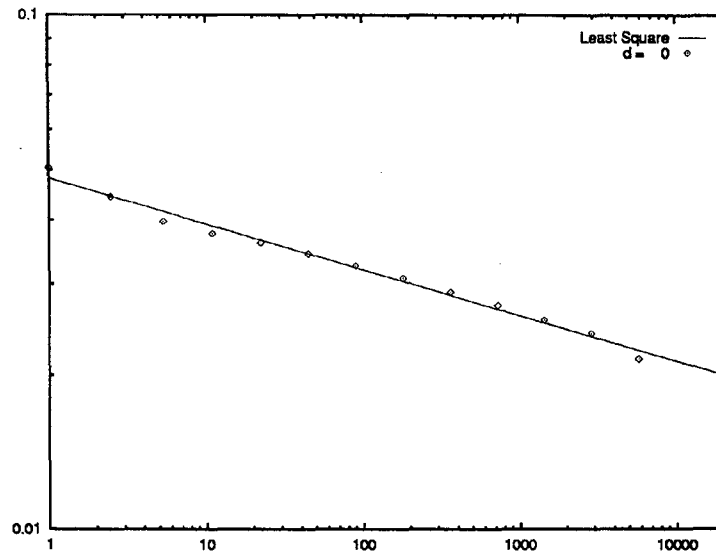


Figure A.8: 最小二乗近似による, べき乗分布の処理データのフィッティング.

対数をとると,

$$\begin{aligned}
 \log P' &= \alpha + \log \frac{2^{\frac{\beta+1}{2}} - 2^{-\frac{\beta+1}{2}}}{\beta+1} + (\beta+1) \log s' \\
 &= \alpha' + \beta' \cdot \log s'
 \end{aligned}$$

となる. このデータ $(\log s'_i, \log P'_i)$ に対して最小二乗近似により直線を決定し, 傾き β' と切片 α' を求める. このとき処理前の傾き β と切片 α は求めた β' と α' により,

$$\begin{aligned}
 \beta &= \beta' - 1 \\
 \alpha &= \alpha' - \log \frac{2^{\frac{\beta'}{2}} - 2^{-\frac{\beta'}{2}}}{\beta'}
 \end{aligned}$$

と表される.

s が非常に小さい部分と大きい部分を除くと, 実際にこの直線はデータによくフィットする (Figure A.7). Manna はこの方法を使い, 系を大きくしたときの傾向から無限系に対するべきの指数 $\beta \simeq -1.22$ を求めた [10].

References

- [1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**: 381 (1987); *Phys. Rev. A* **38**: 364 (1988).
- [2] P. Bak, 陳侃, 訳者 山口昌哉, 木坂正史, 日経サイエンス 3月号 (Vol.21 No.3): 22 (1991).
- [3] P. Bak and M. Paczuski, 訳者 山口昌哉, パリティ Vol.09 No.08: 4 (1994).
- [4] G. A. Held, D. H. Solina, D. T. Keane, W. J. Haag, P. M. Horn, and G. Grinstein, *Phys. Rev. Lett.* **65**: 1120 (1990).
- [5] B. Plourde, F. Nori, M. Bretz, *Phys. Rev. Lett.* **71**: 2749 (1993).
- [6] Z. Olami, H. J. S. Feder and K. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **68**: 1244 (1992).
- [7] 中西 秀, 日本物理学会誌 Vol.49 No.4: 267 (1994).
- [8] B. Drossel, F. Schwabl, *Phys. Rev. Lett.* **69**: 1629 (1992).
- [9] A. Rinaldo, I. Rodrigue-Iturbe, R. Rigon, E. Ijjasz-Vasquez, and R. L. Bras *Phys. Rev. Lett.* **70**: 822 (1993).
- [10] S. S. Manna, *J. Stat. Phys.* **59**: 509 (1990); *Physica A* **179**: 249 (1991).
- [11] C. Tang and P. Bak, *Phys. Rev. Lett.* **60**: 2347 (1988); *J. Stat. Phys.* **51**: 797 (1988).
- [12] L. Pietronero, A. Vespignani, and S. Zapperi, *Phys. Rev. Lett.* **72**: 1690 (1994).
- [13] D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **64**: 1613 (1990).
- [14] S. N. Majumdar, and D. Dhar, *J. Phys. A* **24**: L357 (1991).
- [15] V. B. Priezzhev, *J. Stat. Phys.* **74**: 955 (1994).
- [16] L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu, and S. Zhou, *Phys. Rev. A* **39**: 6524 (1989).
- [17] D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **63**: 1659 (1989).
- [18] S. S. Manna, L. B. Kiss, and J. Kertesz, *J. Stat. Phys.* **61**: 923 (1990).
- [19] G. Strang, 監訳 山口昌哉, 訳者 井上 昭, 線形代数とその応用 (産業図書, 1978).
- [20] H. S. M. Coxeter, 訳者 銀林 浩, 幾何学入門 (明治図書, 1982)
- [21] 山本幸一, 順列・組合せと確率 (岩波書店, 1983)
- [22] F. Spitzer, *Principles fo Random Walk* (Van Nostrand, 1964).